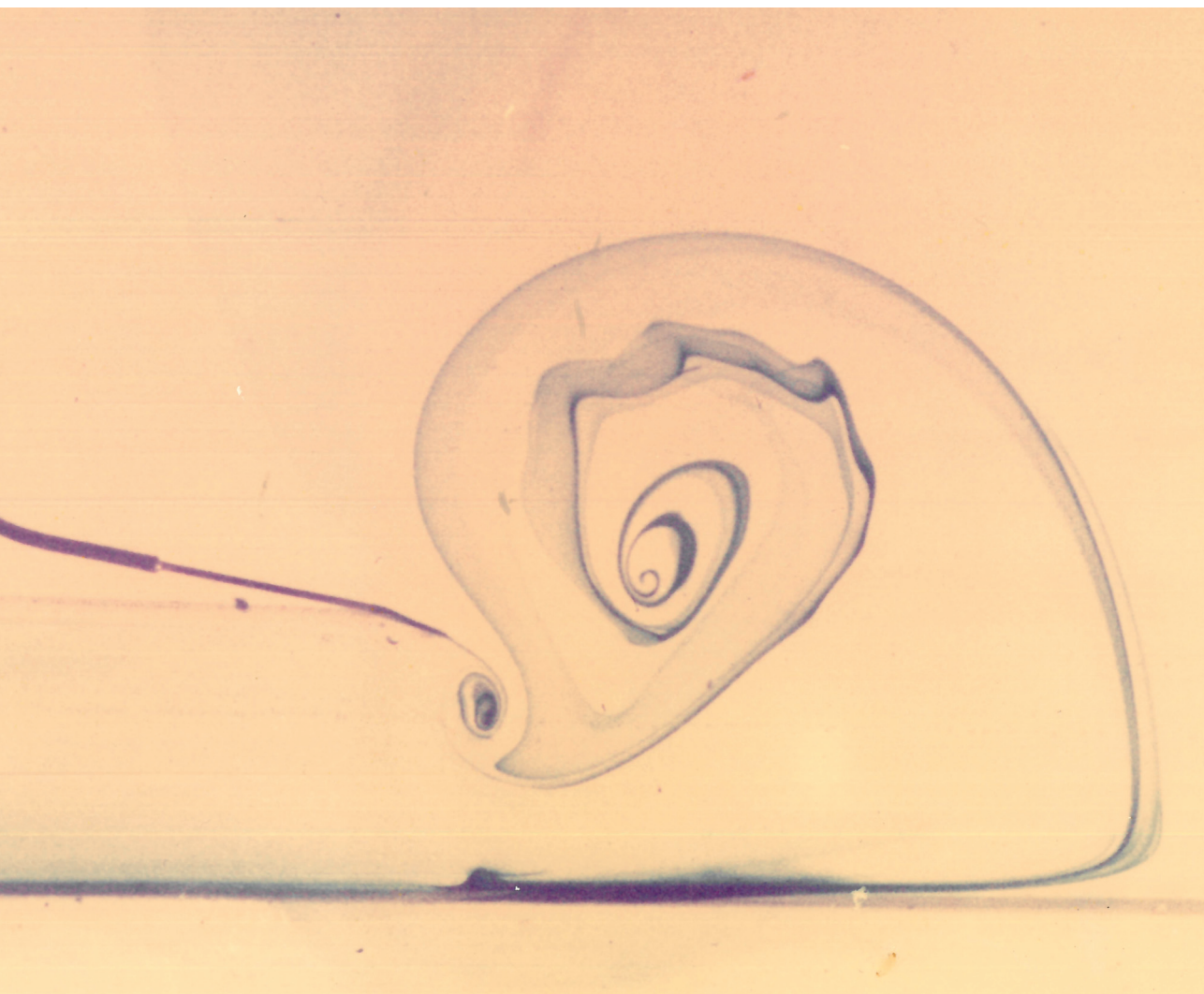


Paolo Blondeaux, Giovanna Vittori

Note di Meccanica dei Fluidi



Paolo Blondeaux, Giovanna Vittori

Note di Meccanica dei Fluidi



è il marchio editoriale dell'Università di Genova



© 2019 GUP

Gli autori rimangono a disposizione per gli eventuali diritti sulle immagini pubblicate.
I diritti d'autore verranno tutelati a norma di legge.

Riproduzione vietata, tutti i diritti riservati dalla legge sul diritto d'autore

Realizzazione Editoriale

GENOVA UNIVERSITY PRESS

Piazza della Nunziata, 6 - 16124 Genova

Tel. 010 20951558

Fax 010 20951552

e-mail: ce-press@liste.unige.it

e-mail: labgup@arch.unige.it

<http://gup.unige.it>

ISBN: 978-88-94943-92-4 (versione a stampa)



(versione eBook)

ISBN: 978-88-94943-93-1 (versione eBook)

Finito di stampare dicembre 2019



Stampato presso

Grafiche G7

Via G. Marconi, 18 A - 16010 Savignone (GE)

e-mail: graficheg7@graficheg7.it

Indice

PREFAZIONE	9
Ringraziamenti	29
FONDAMENTI CINEMATICI	30
1.1 Nozioni cinematiche introduttive	31
1.2 Derivata materiale (o Lagrangiana) e locale	35
1.2.1 L'accelerazione	36
1.3 Analisi locale del moto	37
1.3.1 Decomposizione del campo di moto	38
1.3.2 Il tensore velocità di deformazione	40
1.3.3 Il tensore velocità di rotazione	44
1.4 Teorema del trasporto	45
PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA	50
2.1 L'equazione di continuità	51
2.2 Moti bidimensionali di fluidi incomprimibili	53
2.3 Ulteriore forma del teorema del trasporto	54
FONDAMENTI DINAMICI	55
3.1 Assioma di Cauchy	56
3.2 Principio della quantità di moto	56
3.3 Tensione in un punto	58
3.3.1 Il tensore delle tensioni	58
3.4 Forma differenziale delle equazioni	61
3.5 Principio del momento della quantità di moto	61
3.6 Teorema della potenza meccanica	63
FONDAMENTI TERMODINAMICI	65
4.1 Stato termodinamico di un sistema fluido	66
4.1.1 Variabili di stato	66
4.1.2 Coefficienti di dilatazione (isobaro) e di comprimibilità (isotermo)	67
4.2 Primo principio della termodinamica	70
4.2.1 Formulazione classica	70
4.2.2 Formulazione integrale Lagrangiana	71
4.2.3 Formulazione differenziale: l'equazione dell'energia	72

4.3	Secondo principio della termodinamica	73
4.3.1	Conservazione ed evoluzione	73
4.3.2	Entropia	74
4.3.3	Secondo principio: formulazione integrale	75
4.4	Riflessione sulla definizione di quantità di stato in condizioni di non equilibrio	75
LE EQUAZIONI DEL MOTO		77
5.1	Introduzione	78
5.2	Stato di tensione nei 'fluidi' in quiete	78
5.3	Fluidi viscosi	79
5.3.1	Caratteristiche generali dei fluidi viscosi	79
5.3.2	Legame costitutivo dei fluidi viscosi	81
5.4	Formulazione del problema del moto	83
5.4.1	Le equazioni di Navier-Stokes	83
5.4.2	Le condizioni al contorno	85
MOTI UNIDIREZIONALI		89
6.1	Moti unidirezionali rettilinei	90
6.2	Alcuni esempi	92
LA VORTICITÀ E LA SUA DINAMICA		102
7.1	Vorticità e circolazione	103
7.2	L'equazione della circolazione e il teorema di Kelvin	105
7.3	Equazione della vorticità nei moti incompressibili	106
7.4	La generazione di vorticità nei fluidi a densità costante	108
7.5	Sul meccanismo di generazione dei tornado	112
MOTI A BASSI NUMERI DI REYNOLDS		117
8.1	Introduzione	118
8.2	Equazioni di Stokes	119
8.3	Moti stazionari intorno a corpi immersi a bassi Re	120
8.3.1	Il caso della sfera rigida	120
8.3.2	Il caso del cilindro rigido	126
8.4	Teoria della lubrificazione	128
FLUIDO IDEALE E MOTI IRROTAZIONALI		132
9.1	Lo schema di fluido ideale	133
9.2	Lo schema di moto irrotazionale	135
9.2.1	Il moto irrotazionale indotto in un fluido	139

9.2.2	Le forze agenti sui corpi bidimensionali in moto	146
9.3	Moti irrotazionali non stazionari	148
9.3.1	Energia cinetica	149
9.3.2	Calcolo della forza di massa aggiunta per un cilindro a sezione circolare	150
9.3.3	L'equazione di Morison	152
9.4	Moti irrotazionali piani	153
9.4.1	Moti irrotazionali piani elementari	155
9.4.2	Il metodo della trasformazione conforme	163
9.4.3	I profili alari portanti - profili di Joukowski	169
9.4.4	Moto irrotazionale attorno a un corpo bidimensionale di forma arbitraria	175
9.5	Moti irrotazionali tridimensionali	179
9.5.1	La resistenza indotta	179
GLI EFFETTI DELLA VISCOSITÀ		183
10.1	Lo strato limite	184
10.2	Equazioni dello strato limite piano	185
10.2.1	Formulazione integrale di V. Kàrmàn	189
10.3	Strato limite stazionario su piastra piana	190
10.3.1	Soluzione basata sulla formulazione integrale	190
10.3.2	Soluzione similare per lo strato limite stazionario su lastra piana	193
10.3.3	Ulteriore soluzione approssimata ottenuta attraverso il metodo integrale	196
10.4	Effetto della de-(o ac-)celerazione del moto	197
10.5	Separazione dello strato limite	199
10.5.1	Nozione	199
10.5.2	Origine della separazione	200
10.5.3	Punto di separazione	200
10.6	Moto indotto da corpi in moto stazionario	201
10.6.1	Campo di moto senza separazione	202
10.6.2	Campo di moto con separazione	203
MOTI TURBOLENTI		209
11.1	Le equazioni del moto	210
11.2	La cascata di energia	212
11.3	La viscosità turbolenta	216
11.4	Moto turbolento all'interno di un meato	218
11.4.1	Il substrato laminare	220

11.4.2	Lo stato di equilibrio	221
11.4.3	Il nucleo turbolento	224
11.5	Valutazione del coefficiente di resistenza in un meato	225
11.6	Stato limite turbolento su lastra piana	227
11.7	Energia cinetica della turbolenza	229
11.8	I modelli di turbolenza	233
Bibliografia		235

PREFAZIONE

Queste note sono finalizzate ad aiutare gli studenti nella preparazione degli esami di **Meccanica dei Fluidi e Idrodinamica** per i corsi di laurea magistrale attivi presso la Scuola Politecnica dell'Università di Genova ma anche a fornire allo studente un testo di riferimento, utile all'eventuale sviluppo dei temi trattati nei diversi corsi.

Anche se, nel dedurre le equazioni che governano il moto dei fluidi partendo dai principi della meccanica, si è cercato di seguire un approccio rigoroso, le dispense si pongono soprattutto l'obiettivo di evidenziare le implicazioni fisiche delle equazioni.

Come è facilmente intuibile, per seguire i corsi di **Meccanica dei Fluidi e Idrodinamica** è necessaria un'approfondita conoscenza di molti strumenti matematici, dovendo affrontare lo studio del moto di un continuo altamente deformabile (figura 1.1) e quasi sempre estremamente irregolare (turbolento) (figura 1.2), legandolo alle forze che lo sollecitano.

Per comprendere appieno la complessità dello studio del moto dei fluidi, spesso indotta anche da una complessa geometria, è sufficiente osservare le figure 1.3 e 1.4, che mostrano prove in galleria del vento condotte per determinare la resistenza all'avanzamento incontrata da un'auto e da un aereo, rispettivamente. Le immagini del campo di moto generato da un sommergibile nel momento dell'immersione (figura 1.5) e di quello attorno a un natante in un mare in tempesta (figura 1.6) mostrano ulteriori esempi di complessi problemi idrodinamici.

Anche lo studio della propulsione degli aerei o dei mezzi navali, che può avvenire con diversi sistemi, richiede un'approfondita conoscenza della dinamica dei fluidi. Accurate indagini teoriche e sperimentali sono necessarie per progettare i propulsori a elica (figure 1.7 e 1.8), in cui sono presenti fenomeni essenzialmente idrodinamici, e quelli a getto, in cui la termo-fluidodinamica gioca un ruolo fondamentale (figura 1.9). Inoltre, per specifiche applicazioni, si stanno oggi realizzando propulsori a superfici oscillanti (sia per piccoli aeromobili sia per robot sottomarini progettati per l'esplorazione del fondo del mare) che richiedono la



Figura 1.1: Frangimento di un'onda di mare a Santa Cruz (CA). Immagine da Wikipedia Commons.



Figura 1.2: Tempesta di sabbia in prossimità di Stratford (Texas). La presenza di sedimenti in sospensione permette di visualizzare i vortici che caratterizzano il regime di moto turbolento. Foto da NOAA George E. Marsh Album, theb1365, Historic C&GS Collection.



Figura 1.3: Test su autovettura in galleria del vento. Foto di Rob Bulmahn.

quantificazione delle strutture vorticosi rilasciate da una superficie che avanza e oscilla in un fluido fermo (figura 1.10). Il getto a valle della superficie, generato da tali strutture vorticosi, produce la spinta propulsiva. La figura 1.11 mostra, infine, un'imbarcazione a vela che viene mossa dall'azione del vento. Anche se le vele sono note fin dall'antichità, la loro ottimizzazione può avvenire solo dopo un loro accurato studio.

Dagli esempi illustrati appare evidente come, per migliorare le prestazioni degli aerei e dei mezzi navali, sia necessario studiare la dinamica di oggetti in movimento in un fluido, sia esso aria o acqua. Tale studio non solo è teso a migliorare la stabilità dei mezzi e la loro manovrabilità ma anche migliorare l'efficienza propulsiva e a evitare particolari problemi come quelli legati alla cavitazione di un'elica che è in grado di danneggiare le pale in modo significativo, come è mostrato nella figura 1.12.

Lo studio della meccanica dei fluidi è fondamentale anche per l'ingegneria civile come si può dedurre osservando le figure 1.13 e 1.14 che mostrano gli effetti delle esondazioni del fiume Arno a Firenze nel novembre del 1966 e del torrente Bisagno a Genova nell'ottobre del 1970, quest'ultima avvenuta per l'impossibilità della portata, stimata in circa $1400 \text{ m}^3/\text{s}$, di defluire sotto la copertura di Via Brigate Partigiane. La figura 1.15 mostra i problemi causati dal fenomeno dell'acqua alta a Venezia, fenomeno indotto dalla propagazione di maree particolarmente al-



Figura 1.4: Test su aeromobile (MD-11) in galleria del vento. Foto di autore ignoto



Figura 1.5: Sottomarino classe Typhoon in navigazione. Immagine da Bellona Foundation.



Figura 1.6: Natante della Guardia Costiera Statunitense presso Morro Bay, California. Foto di Mike Baird.



Figura 1.7: Sommergibile Enrico Toti e in primo piano la sua elica. Foto di Lorenzo Nicora.

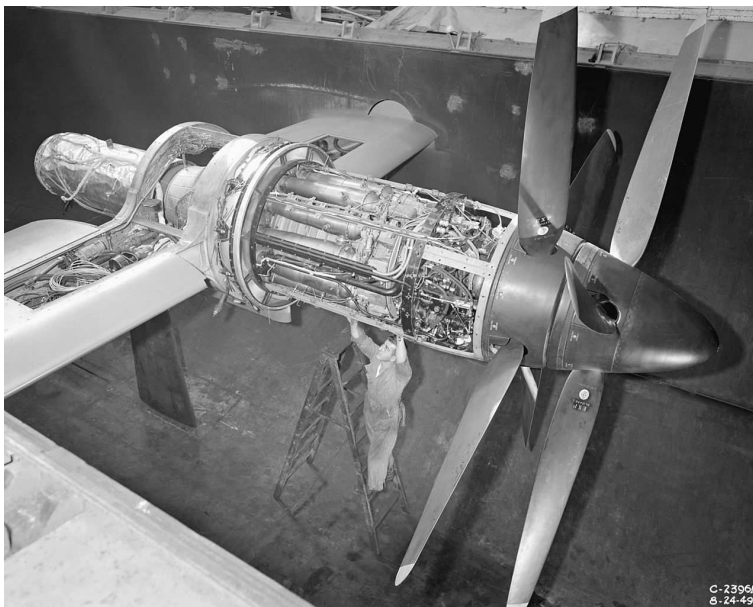


Figura 1.8: Motore Armstrong Siddeley Python, a turbina sperimentale ed eliche controrotanti, sottoposto a prove in una galleria del vento (1949).



Figura 1.9: Motore di un Jetstar Airways Airbus A320-232 fermo presso il Sydney Airport. Foto di Darren Koch.

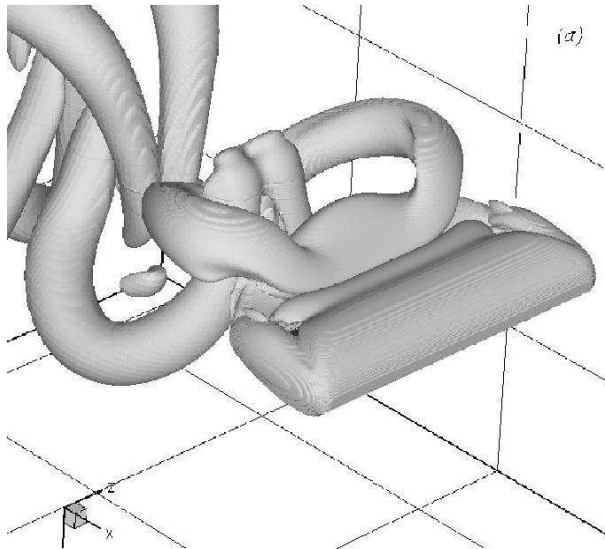


Figura 1.10: Visualizzazione delle strutture vorticosi generate da una superficie oscillante che avanza e oscilla in un fluido fermo.



Figura 1.11: Yawl 'Wendur', realizzato in ferro presso D. & W. Henderson's Meadowside Shipyard, Partick, Glasgow.



Figura 1.12: Elica danneggiata da fenomeni di cavitazione. I danni appaiono evidenti sui bordi delle pale. Foto di Erik Axdahl.

te all'interno della laguna di Venezia attraverso le bocche di Lido, Malamocco e Chioggia (figura 1.16). Infine la figura 1.17 mostra gli effetti disastrosi indotti dall'impatto di uno tsunami sulla costa del Giappone, tsunami prodotto dal terremoto Tohoku che nel 2011 (11 marzo 2011) ha causato enormi danni, fra cui quelli alla centrale atomica di Fukushima.

È solo la comprensione del moto dei fluidi e la quantificazione delle forze da essi indotte che possono suggerire appropriati interventi per prevenire disastri o per sfruttare positivamente l'energia del moto dell'acqua (figure 1.18 e 1.19) o dell'aria (figura 1.20).

La figura 1.21 mostra il modellino di un grattacielo realizzato per effettuare prove in galleria del vento finalizzate a visualizzare il moto attorno al grattacielo e a quantificare le forze agenti sulla struttura. La figura 1.22 mostra invece i risultati di un simile studio condotto attraverso simulazioni numeriche. L'azione del vento può condurre infatti a forze significative specialmente in presenza di fenomeni di risonanza come illustrato dal crollo del ponte Tacoma (soprannominato "Galloping Gertie") nelle acque di Puget Sound, crollo avvenuto nel novembre del 1940 dopo circa quattro mesi dalla sua inaugurazione (figura 1.23).

Nell'esposizione, si assume che lo studente abbia completato i corsi di Analisi Matematica e abbia una buona conoscenza delle funzioni di una o più variabili e di alcune nozioni elementari sulle equazioni differenziali, sia alle derivate ordinarie



Figura 1.13: Basilica di Santa Croce in occasione della piena del fiume Arno del 4 novembre 1966.



Figura 1.14: Esondazione del torrente Bisagno (Genova, ottobre 1970).



Figura 1.15: 'Acqua grande' a Piazza San Marco nel novembre del 1966 (Venezia).



Figura 1.16: Immagine della Laguna di Venezia ripresa da ASTER (Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer), uno strumento installato su Terra, un satellite della NASA Earth Observing System (EOS), il 9 dicembre 2001. (colori naturali simulati).



Figura 1.17: Onda di tsunami (prefettura di Fukushima (Giappone), marzo 2011).



Figura 1.18: Turbina Pelton, Museo de la Técnica de Terrassa. Foto di Frobles.



Figura 1.19: Turbina Francis a 'Imatrankoski power plant' presso Imatra, Finland, utilizzata dal 1936 al 1989. Foto di SeppVei



Figura 1.20: Turbina eolica flottante di StatoilHydro.

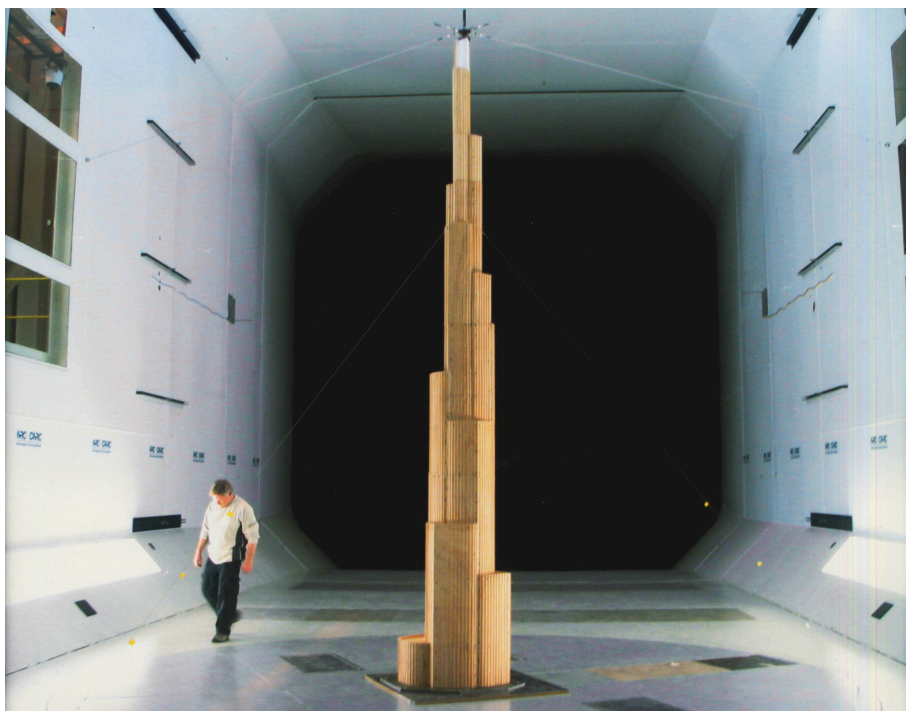


Figura 1.21: Prova in galleria del vento su grattacielo a Burj Khalifa. Foto fornita da RWDI Consulting Engineer.

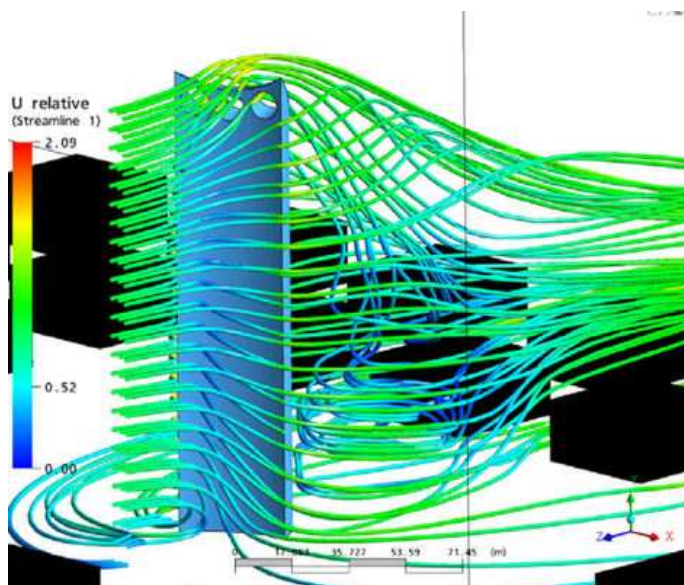


Figura 1.22: Risultati di una simulazione numerica del campo di moto attorno a un grattacielo investito del vento. Immagine di Autore sconosciuto



Figura 1.23: Crollo del ponte Tacoma

che alle derivate parziali.

Le dispense presentano più argomenti di quelli che possono essere svolti in un semestre. È il docente del corso che dovrà selezionare quelli essenziali e/o quelli che ritiene più appropriati per la specifica classe di laurea magistrale a cui il corso è rivolto.

Nel ricavare le equazioni che governano il moto dei fluidi si è cercato di fornire i dettagli, per permettere allo studente di seguire le dimostrazioni presentate, anche se talvolta la derivazione delle equazioni non è essenziale per comprendere la 'fisica' dei fenomeni considerati. È chiaramente una scelta del docente e/o dello studente seguire tali dettagli o focalizzare l'attenzione solo sul risultato finale.

Come si evince dall'indice, le dispense sono volte soprattutto a formulare il problema del moto dei fluidi in generale, ottenendo le equazioni che lo controllano, e a determinare alcune semplici soluzioni particolari, lasciando ad altri corsi il compito di affrontare specifici problemi in cui è coinvolto il moto di un fluido.

Per esempio, lo studio di veicoli all'interno di un fluido (aria e/o acqua) verrà affrontato nei corsi di Aerodinamica e Architettura Navale che sono finalizzati a determinare la resistenza di un aereo, la portanza di un'ala, la scia generata da una nave e, in generale, la dinamica di corpi che si muovono all'interno di fluidi.

Saranno i corsi di Idraulica Fluviale e Idraulica Marittima, rivolti agli studenti di Ingegneria Civile e Ambientale, a studiare il moto dell'acqua nei corpi idrici naturali (fiumi e mari). Per un ingegnere civile/ambientale è infatti estremamente importante saper determinare il moto del fluido lungo i corsi d'acqua, predire la propagazione di una piena e/o di una marea, quantificare i processi di erosione e deposito dei sedimenti, valutare le forze indotte dalle onde su strutture costiere, stimare le correnti litoranee, e predire l'impatto sul territorio di uno tsunami. L'Ingegneria del Vento si occuperà di illustrare e determinare le forze esercitate dal vento sugli edifici e sulle infrastrutture (ponti, coperture, ...). La Bioingegneria affronterà invece lo studio del moto dei fluidi corporei (sangue, umor vitreo,...) o il moto di esseri uni-cellulari o micro-organismi (figura 1.24) al fine di fornire utili informazioni per la cura di particolari patologie o per ottimizzare la somministrazione di farmaci. Recentemente si è sviluppata anche la bio-meccanica che indaga la dinamica dei fluidi attorno a pesci e a uccelli per poter trarre vantaggio dalle soluzioni che la natura ha adottato attraverso l'evoluzione degli esseri viventi nel corso dei secoli per consentire agli stessi di vivere agevolmente immersi in un fluido (figure 1.25, 1.26).

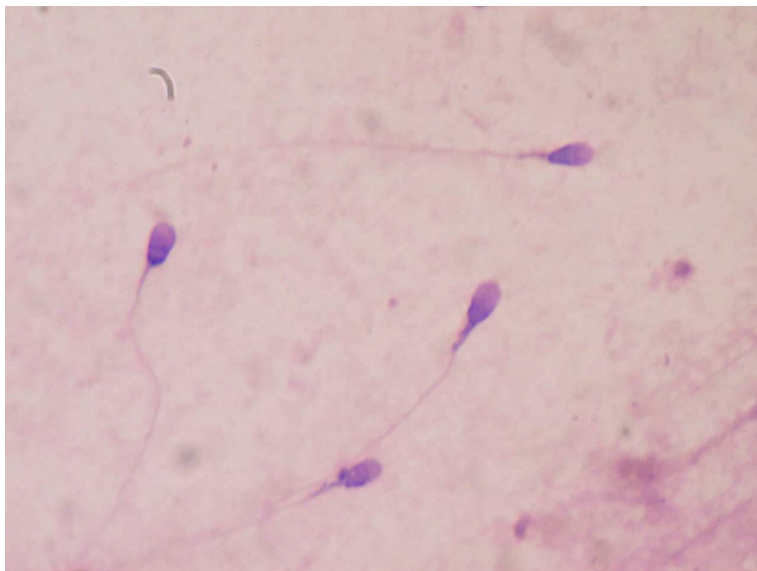


Figura 1.24: Spermatozoi in movimento. Foto di Bobjgalindo



Figura 1.25: Gabbiano in volo presso l'isola di Langeoog nel Mare del Nord. Foto di Arne Groh.



Figura 1.26: Tonni in movimento a Kasai Rinkai Park, Tokio.

Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare il Prof. Giovanni Seminara che, scrivendo anni orsono gli appunti di Meccanica dei Fluidi per gli studenti del corso di laurea in Ingegneria Chimica, ha gettato le basi di queste note. Il testo originale è stato modificato e ampliato e nuovi capitoli sono stati aggiunti per rendere i contenuti appropriati anche per i corsi di laurea in Ingegneria Navale e Ingegneria Civile e Ambientale. Un doveroso ringraziamento va anche agli autori delle immagini che, quando è stato possibile, sono indicati nelle didascalie.

FONDAMENTI CINEMATICI

Dove si descrive il moto di un fluido (traslazione, rotazione e deformazione)



Tornado di categoria F5 mentre si avvicina a Elie (Manitoba) il 22 giugno 2007. Foto di Justin Hobson.

Premessa

La descrizione del moto di un fluido viene usualmente effettuata ipotizzando che esso sia un continuo. Si assume cioè che sia possibile e ragionevole ipotizzare l'esistenza di funzioni continue, così come definite nell'ambito dell'Analisi Matematica, che permettono di specificare il valore assunto da una qualunque caratteristica del fluido al variare del tempo e dello spazio. Ad esempio si assume che sia possibile definire la densità $\rho(\mathbf{x}, t)$, funzione continua del vettore posizione \mathbf{x} e del tempo t , anche se è noto che il rapporto fra la massa contenuta in un volume e il volume stesso è caratterizzato da un andamento discontinuo al variare del volume quando la dimensione di quest'ultimo è paragonabile alla distanza intermolecolare. In altre parole, si assume che i problemi studiati siano caratterizzati da una dimensione molto maggiore della distanza intermolecolare e che quest'ultima scala spaziale non sia di interesse.

1.1 Nozioni cinematiche introduttive

La nozione di *moto* di un continuo è associata a quella di 'cambiamento della posizione' dei suoi punti materiali.

Al fine di procedere alla descrizione matematica del moto è opportuno introdurre un sistema di riferimento cartesiano di origine O (figura 1.1). La 'posizione' di un punto P del continuo verrà indicata con il vettore \mathbf{x} che risulta individuato dalle tre componenti $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$, uguali alle componenti del vettore OP rispetto alla terna di riferimento. Nelle relazioni ed equazioni seguenti, anche se usualmente le componenti di un generico vettore \mathbf{x} sono considerate come gli elementi di una matrice costituita da tre righe e una colonna (vettore colonna) e il corrispondente vettore riga \mathbf{x}^T è il suo trasposto, non verrà fatta alcuna distinzione fra \mathbf{x} e \mathbf{x}^T . Sarà il contesto a indicare al lettore quale opzione (vettore colonna/vettore riga) dovrà essere considerata. Analogamente, nel seguito, verrà introdotto il gradiente $(\nabla \mathbf{v})$ di un generico vettore \mathbf{v} di componenti $(\nabla \mathbf{v})_{i,j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ e altre grandezze descritte da matrici 3×3 e non verrà fatta esplicita distinzione fra queste matrici e il loro trasposto, lasciando al lettore il compito di individuare la corretta notazione.

Consideriamo dunque un punto materiale (particella) P di fluido che all'istante iniziale $t = 0$ occupa la posizione $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ mentre al generico istante t essa occupa la posizione $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Il moto del sistema fluido può rappresentarsi per mezzo delle equazioni

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (1.1a)$$

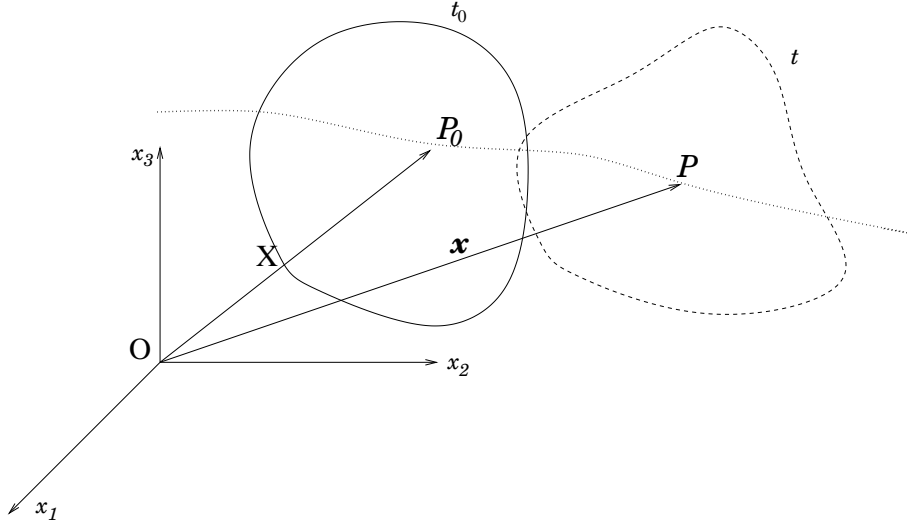


Figura 1.1: Volume fluido in movimento e sistema cartesiano di riferimento (x_1, x_2, x_3) .

o

$$x_j = \varphi_j(X_1, X_2, X_3, t) \quad (j = 1, 2, 3). \quad (1.1b)$$

Osserviamo che se, fissato \mathbf{X} , si lascia variare t la (1.1a) descrive la **traiettoria** della particella P che all'istante iniziale occupava la posizione \mathbf{X} . Inoltre, fissato t , la (1.1a) individua una trasformazione della regione occupata dal fluido all'istante iniziale nella regione da esso occupata all'istante t .

L'evolversi del continuo fluido può descriversi assumendo quali variabili indipendenti le (X_1, X_2, X_3, t) . Tali coordinate sono dette **materiali** o **Lagrangiane** poiché valori assegnati di esse individuano ogni singola particella durante il moto. L'adozione di tale approccio, originariamente introdotto da Euler è talvolta impropriamente attribuita a Lagrange e il sistema di riferimento (X_1, X_2, X_3) è detto 'Lagrangiano'.

La velocità \mathbf{v} di una particella è la derivata della sua posizione rispetto al tempo. Dunque

$$v_i = \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2a)$$

L'integrazione della (1.2a) consente di determinare la posizione occupata dalla particella fluida al trascorrere del tempo, cioè la sua **traiettoria**. L'accelerazione è definita come la derivata della velocità rispetto al tempo. Risulta quindi:

$$a_i = \frac{\partial v_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.2b)$$

Particelle che risultano distinte all'istante iniziale si assume restino tali durante il moto. Ciò implica che la (1.1a) sia dotata di inversa⁽¹⁾

$$\mathbf{X} = \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (1.3a)$$

o

$$X_j = \Phi_j(x_1, x_2, x_3, t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.3b)$$

Le funzioni φ_j e Φ_j sono generalmente continue e dotate di derivate generalmente continue nel campo di definizione.

La trasformazione descritta dalla (1.1a) determina completamente il moto. Questo è tuttavia rappresentabile anche attraverso la conoscenza delle quantità che lo caratterizzano in ciascun punto al variare del tempo, cioè da funzioni del tipo

$$v_k = v_k(x_1, x_2, x_3, t); \quad a_k = a_k(x_1, x_2, x_3, t); \dots \quad (1.4)$$

che forniscono rispettivamente velocità e accelerazione della particella che occupa la posizione $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ all'istante t . Funzioni del tipo (1.4) possono essere poi assegnate per descrivere altre proprietà del fluido che ne caratterizzano lo stato (a esempio la densità ϱ , il peso specifico γ , la temperatura T e così via). Fu D'Alembert che riconobbe per primo l'importanza di descrivere il moto dei fluidi in tal modo ed Euler a concepire l'idea di studiare il moto direttamente attraverso equazioni differenziali in termini delle quantità (1.4). Le variabili indipendenti (x_1, x_2, x_3, t) sono perciò dette '**Euleriane**'. La denominazione di '**coordinate spaziali**' è tuttavia più efficace in quanto enfatizza il fatto che valori assegnati di tali coordinate individuano una singola posizione dello spazio, nella quale vengono a trovarsi particelle diverse al variare del tempo.

Le trattazioni correnti della Meccanica dei Fluidi utilizzano coordinate spaziali. L'uso di coordinate materiali si presenta tuttavia occasionalmente di maggiore efficacia.

Le linee di corrente di un fluido in moto sono le linee che a ogni istante sono tangenti al vettore velocità. Se dx_i indica la componente lungo l'asse x_i di

⁽¹⁾La possibilità di inversione della (1.1a) è subordinata alla condizione

$$0 < J < \infty$$

dove J indica lo Jacobiano della trasformazione definita dalle (1.1a):

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}$$

un elemento infinitesimo lungo una linea di corrente, la condizione di tangenza richiede che:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{x} = 0 \quad (1.5)$$

che può essere espressa in modo equivalente con tre equazioni:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}. \quad (1.6)$$

È individuata un'unica direzione per la linea di corrente in tutti i punti in cui la velocità è diversa da zero.

Se la velocità si annulla in un punto (o lungo una linea) è possibile l'esistenza di due o più linee di corrente. Questo è quello che succede nel punto di ristagno, punto in cui si annulla la velocità e la linea di corrente si divide in due o più linee che seguono il profilo del corpo. Un fluido in moto in cui il campo di velocità, espresso in coordinate Euleriane, è indipendente dal tempo si dice in moto **stazionario** (o permanente). Se il fluido è in moto stazionario le linee di corrente coincidono con le traiettorie. La figura 1.2 mostra le linee di corrente relative al moto attorno a un cilindro e a un profilo alare. In quest'ultimo caso, essendo il moto stazionario, le linee di corrente coincidono con le traiettorie.

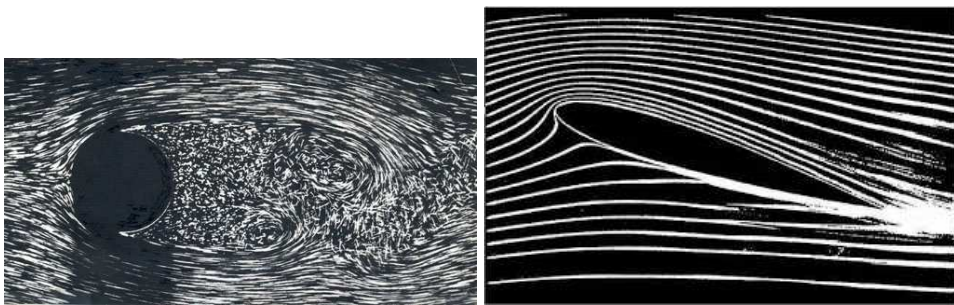


Figura 1.2: Visualizzazione sperimentale delle linee di corrente attorno a
a) un cilindro

(http://nptel.ac.in/courses/112104118/lecture-31/31-3_mechanics.htm)

e b) un profilo alare

(http://1.bp.blogspot.com/_fuYFqFOuPc4/Sr3kkEcRYEI/AAAAAAAAA_g/_0b3-kNTfNM/s320/aero+3a.jpg).

1.2 Derivata materiale (o Lagrangiana) e locale (o Eulariana)

Indichiamo con F una generica proprietà del fluido. Come detto precedentemente essa può essere assegnata in funzione delle variabili spaziali \mathbf{x}

$$F = f_1(\mathbf{x}, t) \quad (1.7)$$

ma attraverso le (1.1a)-(1.1b) risulta funzione delle variabili materiali (\mathbf{X}, t) . Si può quindi anche scrivere

$$F = f_2(\mathbf{X}, t) \quad (1.8)$$

dove le funzioni $f_1(\mathbf{x}, t)$ ed $f_2(\mathbf{X}, t)$ risultano fra di loro legate attraverso le (1.1a) e (1.3a). Osserviamo che tali funzioni hanno significato diverso: l'una ($f_1(\mathbf{x}, t)$) fornisce il valore di F associato alla particella che all'istante t occupa la posizione \mathbf{x} mentre l'altra ($f_2(\mathbf{X}, t)$) fornisce il valore di F assunto all'istante t dalla particella che all'istante iniziale occupava la posizione \mathbf{X} . Le particelle sono in generale diverse e diverso è il valore assunto dalla proprietà F nei due casi.

Da ciò consegue l'opportunità di utilizzare una diversa notazione per indicare le derivate temporali delle due funzioni. Precisamente si scriverà:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{df_2(\mathbf{X}, t)}{dt} \quad (1.10)$$

dove si noti:

- nella (1.9) la derivazione è effettuata mantenendo fissa la posizione \mathbf{x} ; $\partial F/\partial t$ è dunque interpretabile come derivata temporale rispetto a un osservatore che occupa la posizione \mathbf{x} fissa;
- nella (1.10) la derivazione è effettuata mantenendo fissa \mathbf{X} ; dF/dt è dunque interpretabile come derivata temporale rispetto a un osservatore solidale con la particella. La dF/dt è perciò detta 'derivata materiale' o 'sostanziale' o ancora 'totale'.

Dalle (1.9), (1.10) si noti come il calcolo della $\partial F/\partial t$ sia agevole qualora si conosca la $f_1(\mathbf{x}, t)$ e analogamente come sia semplice valutare la dF/dt quando sia nota la $f_2(\mathbf{X}, t)$. Ci poniamo ora il problema di valutare la dF/dt nota la $f_1(\mathbf{x}, t)$. Attraverso la (1.1a) abbiamo

$$f_1(\mathbf{x}, t) = f_1(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = f_2(\mathbf{X}, t) \quad (1.11)$$

Segue quindi che

$$\begin{aligned}
 \frac{dF}{dt} &\equiv \frac{\partial f_2(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \\
 &= \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} v_3 = \\
 &= \frac{\partial f_1}{\partial t} + \nabla f_1 \cdot \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

La derivata materiale di $F(\mathbf{x}, t)$, cioè la velocità di variazione di F valutata rispetto a un osservatore in moto con la particella che all'istante t occupa la posizione \mathbf{x} , si può scrivere dunque nella forma

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla F \cdot \mathbf{v} \tag{1.13}$$

La derivata materiale o “sostanziale” appare così frequentemente in Meccanica dei Fluidi che Stokes introdusse il simbolo DF/Dt . Il primo termine a destra della (1.13) è detto “**derivata locale**” mentre il secondo termine è detto “**derivata convettiva**”.

L'importanza della relazione (1.13) sta nel suo consentire la valutazione di quantità ‘materiali’, cioè associate al moto della particella, a partire da funzioni espresse in termini di coordinate spaziali sulle quali si eseguono operazioni differenziali che coinvolgono solo coordinate spaziali. Si ottiene così il fondamentale risultato della trasferibilità allo studio del moto dei fluidi in termini di coordinate spaziali, di definizioni e concetti noti dalla Meccanica Lagrangiana.

1.2.1 L'accelerazione

L'accelerazione di una particella, come visto in precedenza, si definisce quale derivata seconda (materiale) della posizione della particella rispetto al tempo.

Dunque

$$a_k \equiv \frac{\partial^2 \varphi_k(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial t^2} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.14}$$

Supponiamo assegnato il campo di velocità ed esprimiamo le componenti di \mathbf{a} in termini di $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Utilizzando le (1.1a) e le (1.2a) si può scrivere

$$a_k = \frac{dv_k(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial v_k(\varphi(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \quad (k = 1, 2, 3)$$

o, effettuando la derivazione composta:

$$a_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}$$

ove viene adottata la **convenzione di Einstein**: se un indice compare ripetuto in un solo lato di un'uguaglianza, esso deve essere sommato rispetto a tutti i suoi possibili valori.

Ricordando le (1.2a) segue:

$$a_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} v_j \quad (1.15a)$$

o vettorialmente

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.15b)$$

dove

$$\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

e $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ sono i versori degli assi coordinati.

La relazione (1.15b) fornisce l'accelerazione in funzione della velocità espressa in termini di coordinate euleriane e delle sue derivate. Si noti che l'espressione

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{f} \quad (1.16)$$

non è invariante rispetto a una trasformazione di coordinate. Una forma invariante, che è possibile verificare, è la seguente

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{1}{2} [\nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \\ - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{f}) + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mathbf{f} (\nabla \cdot \mathbf{v})] \end{aligned} \quad (1.17)$$

In particolare se $\mathbf{f} = \mathbf{v}$ si trova

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (1.18)$$

1.3 Analisi locale del moto

Analizziamo il campo di velocità nell'intorno di un punto dato. Vogliamo mostrare come le quantità che emergono da tale analisi forniscono una misura della velocità con cui un elemento materiale di fluido localizzato nella posizione considerata all'istante scelto trasla, ruota e si deforma.

1.3.1 Decomposizione del campo di moto

Sia P un punto del continuo individuato dal vettore posizione \mathbf{x} e $d\mathbf{x}$, di componenti dx_k , indichi un vettore elementare uscente da P di lunghezza infinitesima (figura 1.3). Data la derivabilità delle funzioni v_i è lecito lo sviluppo

$$v_i = v_i^{(P)} + \frac{\partial v_i^{(P)}}{\partial x_j} dx_j \quad (1.19a)$$

dove è indicata con v_i la componente i -esima del vettore velocità in $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ (punto Q), con $v_i^{(P)}$ e $\frac{\partial v_i^{(P)}}{\partial x_j}$ le componenti della velocità e le loro derivate nel punto P e si sono trascurati infinitesimi di ordine superiore al primo. Con notazione vettoriale

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(P)} + \nabla^T \mathbf{v}^{(P)} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.20)$$

dove $\nabla \mathbf{v}$ (gradiente di \mathbf{v}) è un tensore doppio, in generale non simmetrico, le cui nove componenti sono definite dalla relazione:

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.21)$$

e l'apice "T" indica il tensore trasposto.

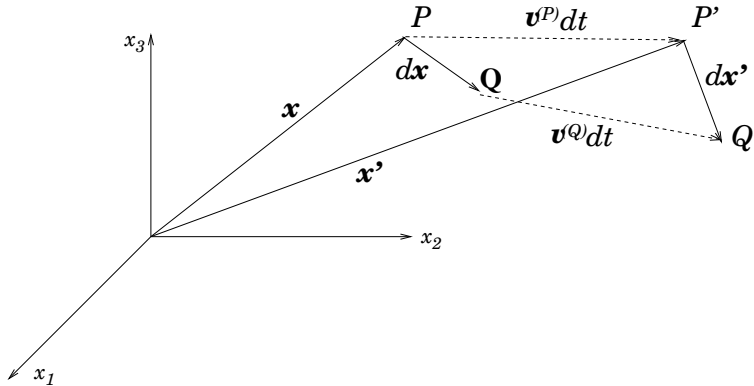


Figura 1.3: Analisi locale del moto

Il moto in un intorno infinitesimo di P è dunque perfettamente determinato dalla conoscenza delle derivate $\frac{\partial v_i^{(P)}}{\partial x_j}$ delle tre componenti della velocità nel punto P .

Ogni tensore può essere decomposto in una parte simmetrica e una emisimmetrica (antisimmetrica). Tale decomposizione, applicata al tensore $\nabla^T \mathbf{v}$, risulta

illuminante al fine di evidenziare analiticamente il contributo al campo di velocità dovuto alla 'deformabilità' del continuo fluido in esame. Infatti vale l'identità:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.22a)$$

o

$$\nabla^T \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega} \quad (1.22b)$$

avendo introdotto i tensori \mathbf{D} e $\mathbf{\Omega}$ tali che:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.23)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.24)$$

È immediato mostrare che D_{ij} ed Ω_{ij} costituiscono le componenti di due tensori rispettivamente simmetrico ed emisimmetrico. Il tensore \mathbf{D} è detto '**tensore velocità di deformazione**' mentre $\mathbf{\Omega}$ è detto '**tensore velocità di rotazione**'. Tali denominazioni discendono dai rispettivi significati di enti che misurano (in un certo modo che esamineremo nel seguito) la velocità con cui le particelle nell'intorno di P all'istante t si deformano e ruotano.

Utilizzando le (1.22a), (1.23), (1.24), le (1.19a), diventano

$$v_i = v_i^{(P)} + D_{ij}^{(P)} dx_j + \Omega_{ij}^{(P)} dx_j \quad (1.25a)$$

o in forma vettoriale

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(P)} + \mathbf{D}^{(P)} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{\Omega}^{(P)} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.25b)$$

Consideriamo ora il moto del fluido fra gli istanti t e $(t + dt)$ supponendo assegnato il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Il punto materiale che all'istante t occupa la posizione P definita dalle coordinate spaziali x_k si porta all'istante $(t + dt)$ nella posizione P' definita dalle coordinate x'_k con

$$x'_k = x_k + v_k^{(P)} dt \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.26)$$

dove $(v_k^{(P)} dt)$ rappresenta la componente k -esima dello spostamento (infinitesimo) del punto materiale considerato (figura 1.3).

Si consideri, ora, l'elemento materiale $d\mathbf{x}$ uscente dal punto materiale P nella configurazione relativa all'istante t , e sia dx_k la sua componente. Esso individua la posizione del punto Q rispetto a P . In seguito al moto, l'elemento $d\mathbf{x}$ si trasforma all'istante $(t + dt)$ nell'elemento $d\mathbf{x}'$, di componenti dx'_k , uscente dal punto

P' . È allora possibile esprimere le componenti dx'_k in termini delle dx_i . Facendo anche uso della (1.19a) si ottiene:

$$\begin{aligned} dx'_k &= (Q'P')_k = x_k + dx_k + v_k(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t)dt - ((x_k + v_k(\mathbf{x}, t)dt)) = \\ &= dx_k + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dx_j dt. \end{aligned} \quad (1.27)$$

È possibile quindi calcolare la rapidità con cui si deforma l'elemento dx_k

$$\frac{dx'_k - dx_k}{dt} = \frac{d(dx_k)}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dx_j \quad (1.28a)$$

o, in termini vettoriali

$$\frac{d(d\mathbf{x})}{dt} = \nabla^T \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.28b)$$

La (1.28b) chiarisce come il termine $\nabla^T \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$ della (1.20) sia interpretabile quale velocità di variazione dell'elemento lineare $d\mathbf{x}$ uscente dal punto P all'istante t . Tale variazione è associata al ruotare e deformarsi dell'elemento fluido.

La (1.19a-b) mostra quindi che le particelle fluide che si trovano in un intorno del punto P sono soggette a un moto di traslazione con velocità $\mathbf{v}^{(P)}$ e a un moto che è legato alla velocità di variazione degli elementi lineari uscenti dal punto P .

1.3.2 Il tensore velocità di deformazione

Le componenti del tensore velocità di deformazione forniscono informazioni sulla rapidità con cui hanno luogo le deformazioni all'interno della massa fluida.

In particolare è facile mostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché il moto risulti localmente e istantaneamente rigido è che all'istante dato e nel punto considerato si abbia $\mathbf{D} = 0$.

Infatti se si considera il generico elemento $d\mathbf{x}$ di lunghezza pari a $ds = (dx_k dx_k)^{1/2}$, dalla (1.28a) segue facilmente

$$\frac{d(ds^2)}{dt} = 2dx_k \frac{d(dx_k)}{dt} \quad (1.29)$$

$$\frac{d(ds^2)}{dt} = 2dx_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dx_j \quad (1.30)$$

Osservando che entrambi gli indici k ed j sono saturati la (1.30) può porsi nella forma

$$\frac{d(ds^2)}{dt} = dx_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) dx_j \quad (1.31a)$$

o

$$\frac{d(|d\mathbf{x}|^2)}{dt} = 2d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}) \quad (1.31b)$$

Fissato dunque $d\mathbf{x}$, la velocità di variazione del quadrato del suo modulo è univocamente determinata dalla conoscenza del tensore \mathbf{D} . Nel caso di un continuo rigido si ha quindi $\mathbf{D} = 0$ in ogni punto e in ogni istante. Il non annullarsi del tensore \mathbf{D} è dunque espressione della non rigidità del moto, cioè del deformarsi degli elementi materiali nel corso del movimento.

Le relazioni (1.28a-1.28b) forniscono la velocità di dilatazione della componente k -esima dell'elemento materiale $d\mathbf{x}$ all'istante t . Se l'elemento $d\mathbf{x}$ ha la direzione parallela all'asse x_k , indicata con $dx_k^{(k)}$ la sua componente nella direzione dell'asse x_k , segue

$$\frac{d(dx_k^{(k)})}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} dx_k = D_{kk} dx_k. \quad (1.32)$$

Si noti che l'indice k compare in entrambi i termini della (1.32); quindi, seguendo la convenzione di Einstein, l'indice k non è sommato e la (1.32) rappresenta tre relazioni ottenute attribuendo all'indice k alternativamente i valori 1, 2 e 3.

Indicando con $\dot{\Delta}_k$ la **velocità di dilatazione lineare relativa** del generico elemento parallelo a uno degli assi coordinati la (1.32) porge:

$$\dot{\Delta}_k = \frac{1}{|d\mathbf{x}^{(k)}|} \frac{d|d\mathbf{x}^{(k)}|}{dt} = D_{kk}. \quad (1.33)$$

Le componenti a indici eguali del tensore velocità di deformazione sono perciò associate alle velocità di dilatazione lineare relativa degli elementi paralleli agli assi coordinati.

Esaminiamo ora la velocità con cui cambia durante il moto la direzione relativa tra gli elementi materiali. Siano $d\mathbf{x}_A$ e $d\mathbf{x}_B$ due elementi materiali all'istante t e α l'angolo tra le loro direzioni. All'istante $(t + dt)$ gli elementi trasformati $d\mathbf{x}'_A$ e $d\mathbf{x}'_B$ saranno dotati di direzioni che individuano un angolo α' (figura 1.4). È immediato definire la **velocità di dilatazione angolare** degli elementi materiali considerati nella forma:

$$\dot{\gamma} = \frac{\alpha' - \alpha}{dt}. \quad (1.34)$$

È di particolare interesse determinare la velocità di dilatazione angolare di coppie di elementi materiali aventi inizialmente direzioni e versi coincidenti con quelli di due assi coordinati.

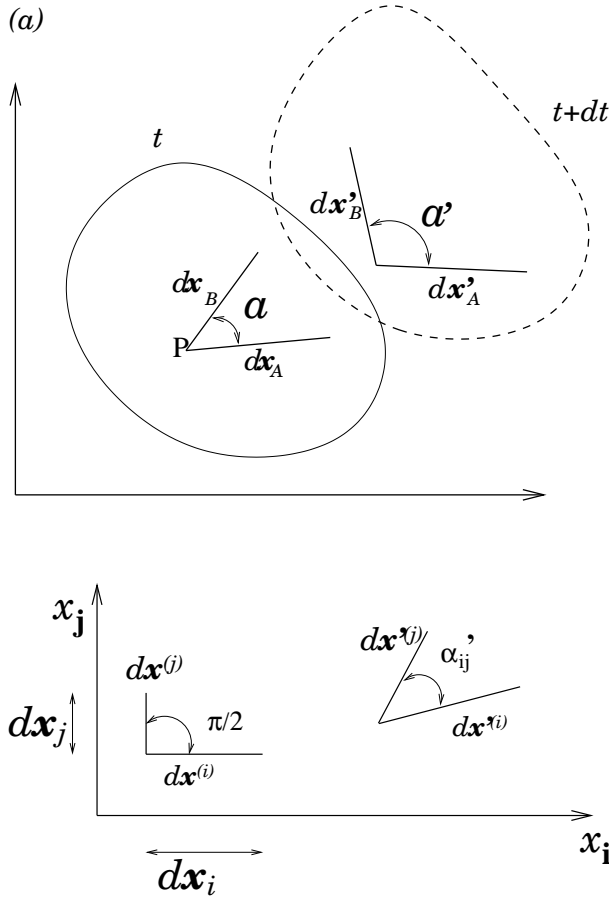


Figura 1.4

Facendo riferimento alla figura 1.4b sia dunque:

$$dx_A = dx^{(i)} \quad ; \quad dx_B = dx^{(j)}$$

con

$$|dx^{(i)}| = dx_i$$

$$|dx^{(j)}| = dx_j$$

Segue $\alpha = \pi/2$. Indichiamo, poi, con $dx^{(i)'}$ e $dx^{(j)'}$ gli elementi trasformati all'istante $(t + dt)$, con α'_{ij} l'angolo individuato dagli stessi e poniamo quindi $\alpha' = \alpha'_{ij}$ nella (1.34).

Per ogni coppia di indici (i, j) distinti è possibile definire la velocità di dilatazione angolare nella forma

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\alpha'_{ij} - \pi/2}{dt} \quad (1.35)$$

Trascurando infinitesimi del secondo ordine in dt , le componenti a indici distinti del tensore delle velocità di deformazione risultano legate a $\dot{\gamma}_{ij}$ dalla relazione

$$\dot{\gamma}_{ij} = -2D_{ij}. \quad (1.36)$$

Infatti, indicate con $dx_k^{(i)}$ e $dx_k'^{(j)}$ le proiezioni degli elementi trasformati $d\mathbf{x}'^{(i)}$ e $d\mathbf{x}'^{(j)}$ sugli assi x_k , segue

$$\cos \alpha'_{ij} = \frac{dx_k'^{(i)}}{|d\mathbf{x}'^{(i)}|} \frac{dx_k'^{(j)}}{|d\mathbf{x}'^{(j)}|} \quad (1.37)$$

Ma, per la (1.35)

$$\cos \alpha'_{ij} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \dot{\gamma}_{ij} dt \right) = -\sin(\dot{\gamma}_{ij} dt) \simeq -\dot{\gamma}_{ij} dt \quad (1.38)$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in dt .

Sviluppiamo la (1.37) tenendo conto della (1.27). A meno di infinitesimi del second'ordine, si ottiene

$$\begin{aligned} -\dot{\gamma}_{ij} dt &= \cos \alpha'_{ij} \\ &= \left[(\delta_{ik} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dt) \frac{dx_i^{(i)}}{|d\mathbf{x}'^{(i)}|} \right] \left[(\delta_{jk} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dt) \frac{dx_j^{(j)}}{|d\mathbf{x}'^{(j)}|} \right] = \\ &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dt \frac{dx_i^{(i)}}{|d\mathbf{x}'^{(i)}|} \frac{dx_j^{(j)}}{|d\mathbf{x}'^{(j)}|}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Osservando poi che in forza delle (1.27), (1.32) e (1.33) si ottiene

$$d|d\mathbf{x}^{(k)}| = |d\mathbf{x}'^{(k)}| - |d\mathbf{x}^{(k)}| \quad (1.40)$$

e dunque

$$\frac{d|d\mathbf{x}^{(k)}|}{|d\mathbf{x}^{(k)}|} = \frac{|d\mathbf{x}'^{(k)}|}{|d\mathbf{x}^{(k)}|} - 1 = \dot{\Delta}_k dt \quad (1.41)$$

segue

$$1 + \dot{\Delta}_k dt = \frac{|d\mathbf{x}'^{(k)}|}{|d\mathbf{x}^{(k)}|} \quad \text{oppure} \quad \frac{|d\mathbf{x}^{(k)}|}{|d\mathbf{x}'^{(k)}|} = \frac{1}{1 + \dot{\Delta}_k dt} \quad (1.42)$$

e quindi

$$\frac{dx_i^{(i)}}{|d\mathbf{x}'^{(i)}|} \frac{dx_j^{(j)}}{|d\mathbf{x}'^{(j)}|} = \frac{1}{(1 + \dot{\Delta}_i dt)} \frac{1}{(1 + \dot{\Delta}_j dt)} = 1 + O(dt). \quad (1.43)$$

Dalla (1.43) appare chiaro che la dilatazione lineare degli elementi considerati presenta un'influenza del secondo ordine sulla loro dilatazione angolare e, a meno di infinitesimi, segue:

$$\dot{\gamma}_{ij} = -2D_{ij} \quad (1.44)$$

1.3.3 Il tensore velocità di rotazione

Le componenti del tensore velocità di rotazione, introdotto nella (1.24), sono legate alla velocità con cui avvengono le rotazioni del fluido in moto. Più precisamente si può mostrare facilmente che le componenti Ω_{ij} sono legate alla media delle velocità di rotazione proprie delle proiezioni sul piano (x_i, x_j) degli elementi lineari della stella di centro P .

Consideriamo dunque la circonferenza C_{ij} , intersezione della superficie sferica di raggio r e centro P (figura 1.5) con un piano passante per P e parallelo al piano coordinato x_i, x_j . Sia A_{ij} l'area del cerchio di circonferenza C_{ij} . Indichiamo inoltre con \mathbf{n} il versore normale alla circonferenza di componenti (n_i, n_j) e con $\boldsymbol{\tau}$ il versore tangente. È facile verificare che $\boldsymbol{\tau} = (-n_j, n_i)$. I punti materiali Q appartenenti a C_{ij} , subiscono fra gli istanti t e $(t + dt)$ una rotazione di velocità angolare v_τ/r , essendo v_τ la componente tangenziale della velocità in Q . Assunto positivo il verso anti-orario si ha

$$v_\tau = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = v_j n_i - v_i n_j \quad (1.45)$$

La velocità angolare di rotazione media di tutti i punti Q si ottiene, dunque, attraverso la relazione:

$$\Omega_{media}^{(ij)} = \frac{1}{2\pi r} \frac{1}{r} \int_{C_{ij}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dC \quad (1.46)$$

Trasformando l'integrale di linea in un integrale di superficie attraverso la formula di Green

$$\int_{C_{ij}} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dC = \int_{A_{ij}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (1.47)$$

dove A_{ij} indica l'area delimitata da C_{ij} e $\hat{\mathbf{n}}$ la sua normale (in questo caso uscente dal foglio). È facile verificare che, utilizzando la (1.47), la (1.46) diviene

$$\Omega_{media}^{(ij)} = \frac{1}{2A_{ij}} \int_{A_{ij}} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dA \quad (1.48)$$

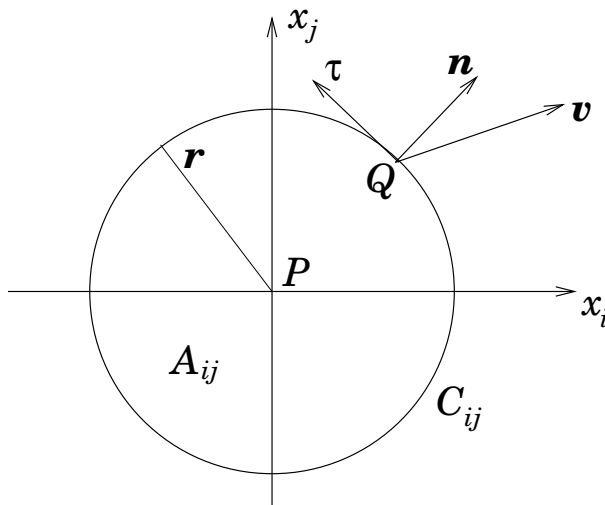


Figura 1.5

Applicando infine il teorema del valor medio e passando al limite per $r \rightarrow 0$ segue

$$\Omega_{media}^{(ij)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\Omega_{ij} \quad (1.49)$$

La (1.49) dimostra la proposizione enunciata più sopra.

Esempio La figura 1.6 mostra un particolare campo di moto in un intorno di un punto che può essere scomposto nella sua parte costante (primo termine a destra della (1.25a)), in una parte lineare (secondo e terzo termine a destra della (1.25a) e la figura 1.8). La figura 1.9 mostra i termini non lineari, trascurati nella (1.25a), che diventano significativi solo lontano dal punto considerato. Le figure 1.10 e 1.11 mostrano infine la parte lineare decomposta, rispettivamente, nel contributo simmetrico e in quello emisimmetrico. Il primo, a sua volta, può essere decomposto in una parte isotropa (figura 1.12) e nel residuo (figura 1.13).

1.4 Teorema del trasporto

Forniamo, infine, la dimostrazione di un teorema cinematico la cui importanza si rivelerà nel seguito.

Sia $V = V(t)$ un **volume materiale di fluido**, cioè un volume di fluido che contiene sempre le stesse particelle fluide. Si noti che un volume materiale di fluido in generale si muove e si deforma con il tempo e i suoi contorni sono impermeabili alla massa.

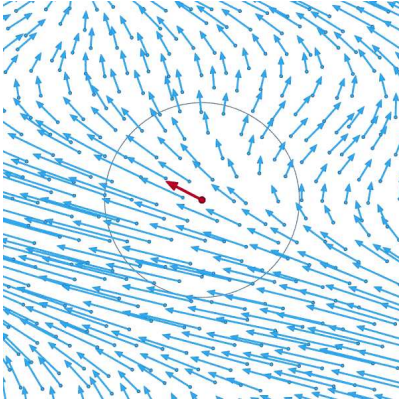


Figura 1.6: Particolare campo di moto nell'intorno di un punto (figura preparata dal prof. Jorge Stolfi)

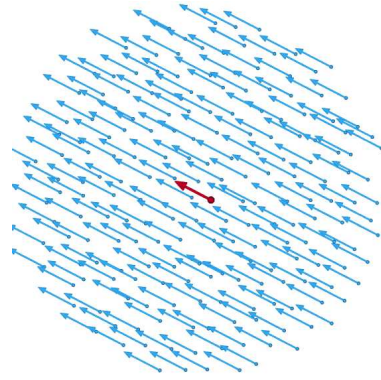


Figura 1.7: Parte costante del campo di moto raffigurato in figura 1.6 (figura preparata dal prof. Jorge Stolfi)

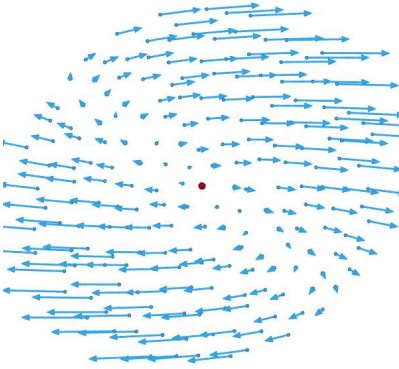


Figura 1.8: Parte lineare, nell'intorno del punto evidenziato, del campo di moto in figura 1.6 (figura preparata dal prof. Jorge Stolfi)

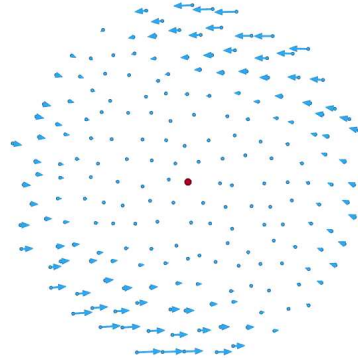


Figura 1.9: Parte non lineare del campo di moto raffigurato in figura 1.6 (figura preparata dal prof. Jorge Stolfi)

Sia $F(\mathbf{x}, t)$ una funzione scalare (o la generica componente di una funzione vettoriale) della posizione e del tempo. L'integrale

$$\int_{V(t)} F dV \quad (1.50)$$

è dunque una funzione del tempo ottenuta effettuando l'integrazione della $F(\mathbf{x}, t)$ estesa alla regione dello spazio occupata all'istante t da $V(t)$. Vogliamo ora

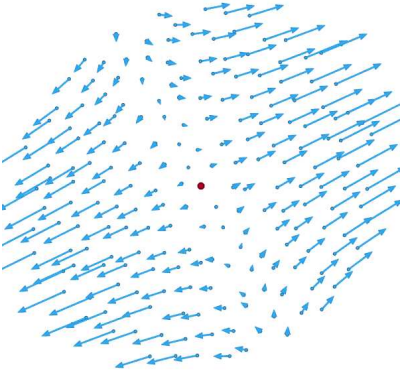


Figura 1.10: Contributo, nell'intorno del punto evidenziato, della parte simmetrica del gradiente della velocità al campo di moto rappresentato in figura 1.6 (figura preparata dal prof. Jorge Stolfi)

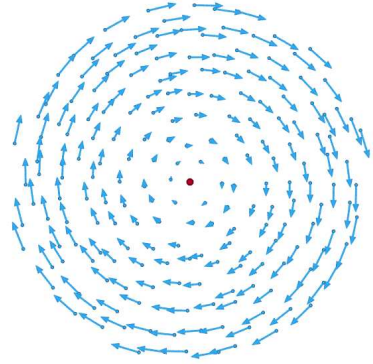


Figura 1.11: Contributo, nell'intorno del punto evidenziato, della parte antisimmetrica del gradiente della velocità al campo di moto rappresentato in figura 1.6 (figura preparata dal prof. Jorge Stolfi)

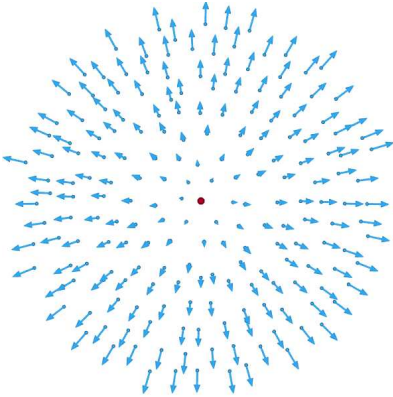


Figura 1.12: Contributo, nell'intorno del punto evidenziato, della parte isotropa del tensore velocità di deformazione al campo di moto rappresentato in figura 1.10 (figura preparata dal prof. Jorge Stolfi)

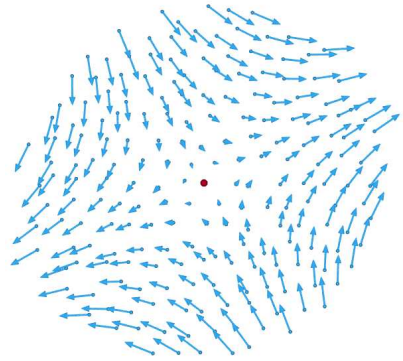


Figura 1.13: Contributo, nell'intorno del punto evidenziato, della parte non isotropa del tensore velocità di deformazione al campo di moto rappresentato in figura 1.6 (figura preparata dal prof. Jorge Stolfi)

ottenere una espressione per la derivata materiale di tale integrale.

$$\frac{d}{dt} \int_V F dV = \int_V \frac{dF}{dt} dV + \int_V F \frac{d(dV)}{dt}. \quad (1.51)$$

La relazione precedente deriva dalla semplice constatazione che un integrale può essere pensato come la somma di tanti contributi infinitesimi $F dV$. Utilizzando le regole per la derivazione della somma e del prodotto di funzioni, si ottiene la

(1.51). Osservando che dV è pari al prodotto $dx_1 dx_2 dx_3$ (dx_i elemento parallelo all'asse i) è possibile, utilizzando la

$$\frac{d(dx_i)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i \quad (1.52)$$

che deriva dalla (1.28a), ottenere la relazione

$$\begin{aligned} \frac{d(dV)}{dt} &= \frac{d(dx_1 dx_2 dx_3)}{dt} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \nabla \cdot \mathbf{v} dV. \end{aligned} \quad (1.53)$$

La (1.53) sostituita nella (1.51) porge

$$\frac{d}{dt} \int_V F dV = \int_V \left(\frac{dF}{dt} + F \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV \quad (1.54)$$

La relazione espressa dalla (1.54) esprime il cosiddetto **teorema del trasporto**.

Il suo significato cinematico emerge ove se ne fornisca una formulazione alternativa ottenuta osservando che, per la (1.12), si ha:

$$\frac{dF}{dt} + F \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F + F \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} F) \quad (1.55)$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \int_V F dV = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} F) \right] dV \quad (1.56)$$

Donde, considerando il volume (fisso) V_0 che coincide con V all'istante t_0 e utilizzando il teorema della divergenza, segue:

$$\frac{d}{dt} \int_V F dV \big|_{t=t_0} = \int_{V_0} \frac{\partial F}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS_0 \quad (1.57)$$

dove S_0 indica la frontiera di V_0 , \mathbf{n} è il versore normale con direzione positiva verso l'esterno, e $\partial/\partial t$ ha il significato espresso dalla (1.9). La (1.57) mostra che la derivata materiale dell'integrale di F esteso al volume materiale V uguaglia la somma della velocità di variazione dell'integrale della F esteso al volume fisso istantaneamente coincidente con V e del flusso di F attraverso la frontiera S_0 di contorno di tale volume fisso.

La (1.53) consente di ottenere:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{dV} \frac{d(dV)}{dt} \quad (1.58)$$

che mostra che $\nabla \cdot \mathbf{v}$ fornisce la velocità di dilatazione volumetrica relativa, nel punto in esame.

Si osservi inoltre che $\nabla \cdot \mathbf{v}$ coincide con la traccia, cioè con la somma degli elementi sulla diagonale, del tensore delle velocità di deformazione. Considerando il significato fisico che è stato attribuito alle componenti a indici uguali del tensore \mathbf{D} , l'interpretazione fisica di $\nabla \cdot \mathbf{v}$, qui illustrata, non è inaspettata. Quest'ultima affermazione sarà chiara quando sarà analizzato il principio di conservazione della massa.

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Dove si studia il principio di conservazione della massa e le sue conseguenze

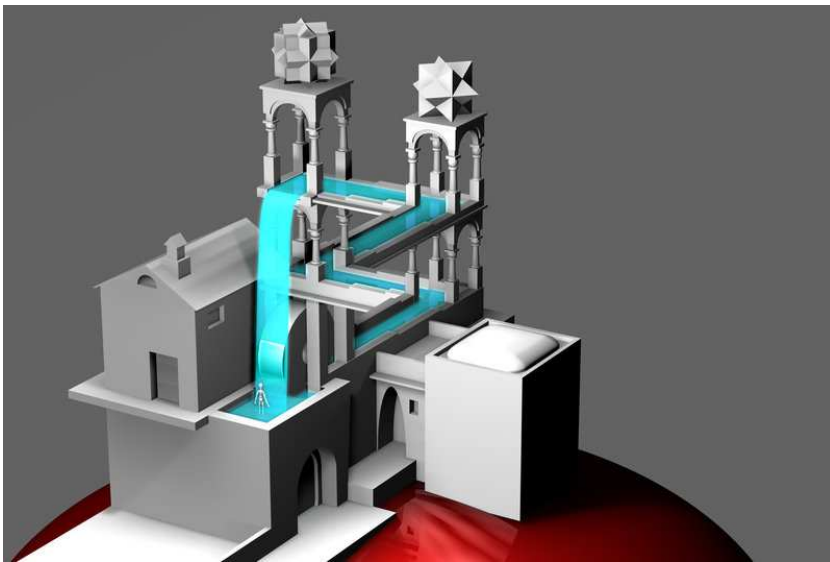


Immagine di Autore ignoto da un'idea di Maurits Cornelis Escher

2.1 L'equazione di continuità

A un fluido è sempre associata una funzione densità $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, definita in modo che la quantità

$$\mathcal{M} = \int_V \rho dV \quad (2.1)$$

determina la massa \mathcal{M} associata alla porzione del fluido che all'istante t occupa la regione V . La funzione ρ è naturalmente assunta a valori positivi ($\rho > 0$).

Postuliamo che valga il seguente **principio di conservazione della massa**: *"la massa associata alla porzione di fluido che occupa V non cambia col moto di V , tale volume essendo un volume materiale"*. Prima di trarre le conseguenze analitiche di tale enunciato osserviamo che le condizioni restrittive da esso imposte sulla struttura del campo di moto non presentano sempre una natura strettamente cinematica. È tuttavia opportuno considerarle a questo stadio della trattazione poiché possono considerarsi come un sorta di 'condizioni di compatibilità' cui il campo di moto deve soddisfare per risultare fisicamente significativo.

In termini analitici il principio enunciato si esprime:

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (2.2)$$

Ricordando la (1.54), la (2.2) assume la forma:

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad (2.3)$$

donde, data l'arbitrarietà di V , segue:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

La (2.4) è detta 'forma spaziale' (o Euleriana) dell'equazione che esprime il principio di conservazione della massa, detta anche equazione di continuità. Essa costituisce una condizione necessaria e sufficiente affinché il moto sia tale che venga conservata la massa di ciascun volume materiale. Ricordando la (1.12), la (2.4) può risciversi nella forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.5)$$

Sono importanti alcuni casi particolari di tali relazioni.

Se il moto del fluido avviene in modo tale da non indurre apprezzabili variazioni di densità né nello spazio né nel tempo, esso si definisce 'incomprimibile e indilatabile' e la (2.5) si traduce nella più semplice

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.6)$$

che impone la 'solenoidalità' del campo di velocità. Tale locuzione esprime la costanza del flusso volumetrico (portata volumetrica) Q che attraversa la generica sezione di un tubo di flusso, cioè di un 'tubo' costruito con linee di corrente

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (2.7)$$

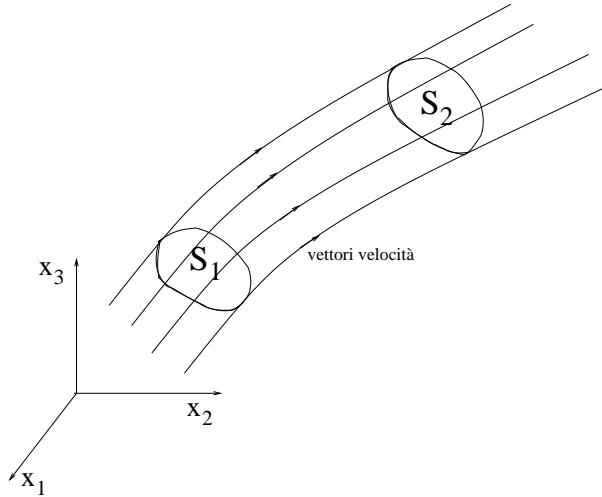


Figura 2.1: Tubo di flusso.

Considerato infatti il volume V , delimitato dalle superfici S_1 , S_2 e dalla superficie del tubo di flusso S_ℓ (si veda la figura 2.1), dalla (2.6) segue:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_{S_1+S_2+S_\ell} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0.$$

Notando infine che il flusso volumetrico attraverso la superficie S_ℓ si annulla, si ottiene la (2.7).

Se il moto del fluido è stazionario la (2.5) porge

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.8)$$

In questo caso è costante il flusso di massa (portata massica) associato alla generica sezione di un tubo di flusso

$$Q_m = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.9)$$

Le due conclusioni precedenti discendono quali semplici conseguenze del teorema della divergenza.

La (2.6) esprime la costanza della densità del fluido che viene anche detto '*fluido a densità costante*' anche se più spesso viene utilizzata l'impropria denominazione di fluido incompressibile.

2.2 Moti bidimensionali di fluidi incompressibili

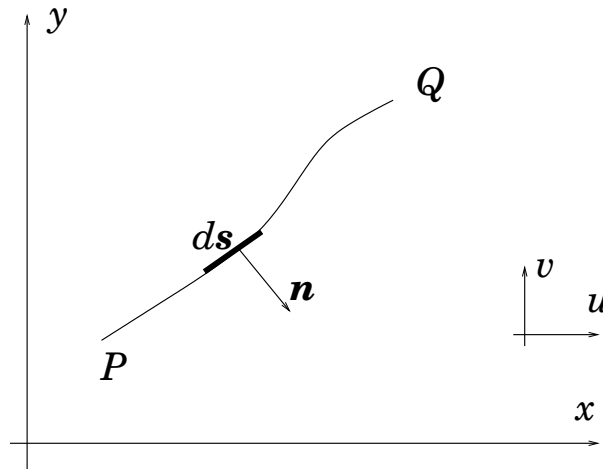


Figura 2.2

Il principio di conservazione della massa per un moto bidimensionale di un fluido a densità costante nel piano (x, y) impone:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

dove u e v sono le componenti della velocità nelle direzioni x e y rispettivamente. Una conseguenza della (2.10) è che $u dy - v dx$ è un differenziale esatto, cioè è il differenziale di una funzione di due variabili $\psi(x, y)$. Infatti le condizioni necessarie e sufficienti affinché la forma differenziale $-v dx + u dy$ sia il differenziale

esatto di una funzione $\psi(x, y)$ sono che u , v , $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ siano funzioni continue e che

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

che corrisponde proprio all'equazione di continuità (2.10).

Segue dunque:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Tale relazione mostra che è possibile conoscere il campo di velocità nota la sola funzione (scalare) ψ .

La funzione ψ consente poi di calcolare facilmente la portata volumetrica (per unità di larghezza) q che attraversa una curva assegnata. Si considerino due punti P e Q e la curva C che li congiunge (si veda la figura 2.2). La definizione della portata volumetrica, per unità di larghezza, che attraversa la sezione delimitata dalla curva C :

$$q = \int_P^Q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

osservando che $\mathbf{n} = (n_x, n_y) = (\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$, consente di pervenire a:

$$q = \int_P^Q (u dy - v dx) = \int_P^Q d\psi = \psi_Q - \psi_P$$

La portata che attraversa la curva in esame è pari dunque alla differenza tra il valore assunto dalla funzione ψ nel punto Q e nel punto P .

Osservando che la portata volumetrica che attraversa una linea di corrente è nulla, essendo il vettore velocità tangente alla linea in ogni suo punto, la funzione ψ deve essere costante lungo una linea di corrente.

La funzione ψ è detta **funzione di corrente**.

2.3 Ulteriore forma del teorema del trasporto

Utilizzando il teorema del trasporto e l'equazione di continuità è facile mostrare che

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho F dV = \int_V \rho \frac{dF}{dt} dV \quad (2.11)$$

con $F(\mathbf{x}, t)$ funzione arbitraria. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho F dV &= \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} F + \rho \frac{dF}{dt} + \rho F \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV = \\ &= \int_V \left[F \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \rho \frac{dF}{dt} \right] dV = \int_V \rho \frac{dF}{dt} dV \end{aligned} \quad (2.12)$$

FONDAMENTI DINAMICI

Dove si determinano le forze generate dal moto di un fluido e il moto di un fluido in funzione delle forze che lo sollecitano



Impatto di un'onda contro il Ludington Lighthouse, alto 57 piedi, durante una tempesta, con venti fino a 81 mph, che ha investito le coste del Michigan il 26 ottobre 2010. Foto del 'NOAA Great Lakes Environmental Research Laboratory'

3.1 Assioma di Cauchy

Si consideri un sistema continuo in moto che all'istante generico t occupa il volume $V(t)$ dello spazio. L'assioma di Cauchy essenzialmente formula un'ipotesi sulla natura del continuo (fluido nel nostro caso) che consente di introdurre, nell'ambito dell'approccio continuo, le azioni che le diverse porzioni di un materiale reale si trasmettono reciprocamente. Enunciamolo:

su ogni superficie chiusa immaginaria S' , di versore normale \mathbf{n} , contenuta in V esiste una distribuzione di vettori tensione \mathbf{t} il cui risultante e momento risultano equivalenti al risultante e momento dell'effettivo sistema di forze in cui si traduce l'azione della materia posta esternamente a S' su quella contenuta internamente.

Si osservi che l'assioma enunciato, postulando l'esistenza del vettore tensione \mathbf{t} , ammette che esista, finito il limite

$$\mathbf{t} = \lim_{\delta S' \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{R}}{\delta S'} \quad (3.1)$$

dove $\delta \mathbf{R}$ è il risultante delle forze agenti sulla porzione $\delta S'$ di S' da parte del fluido a essa esterno. Inoltre, postulando che la distribuzione di \mathbf{t} esaurisca l'interazione fra le porzioni di fluido esterna e interna a S' , implicitamente ammette che sia

$$\lim_{\delta S' \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{M}}{\delta S'} = 0 \quad (3.2)$$

dove $\delta \mathbf{M}$ è una coppia, di asse dato, che con $\delta \mathbf{R}$ costituisce un sistema equivalente al sistema di forze agenti sulla porzione $\delta S'$ di S' da parte del fluido a essa esterno. Infine appare evidente come il vettore \mathbf{t} dipenda, oltre che dalla posizione \mathbf{x} e dal tempo t anche dal valore di \mathbf{n} .

La validità dell'assioma di Cauchy va appunto intesa in senso assiomatico, cioè come un'ipotesi che si rileva metodologicamente efficace in quanto consente la costruzione di teorie in grado di interpretare vaste classi di fenomeni che interessano alcuni materiali reali. Di essa non è possibile fornire giustificazione sperimentale diretta, cioè in termini operativi.

3.2 Principio della quantità di moto

Consideriamo un sistema continuo in moto che, all'istante t , occupa il volume $V(t)$ di frontiera $S(t)$ (figura 3.1). Supponiamo che sul continuo siano applicate forze di natura puramente meccanica che supporremo note quali funzioni della posizione \mathbf{x} e del tempo t e che distingueremo in:

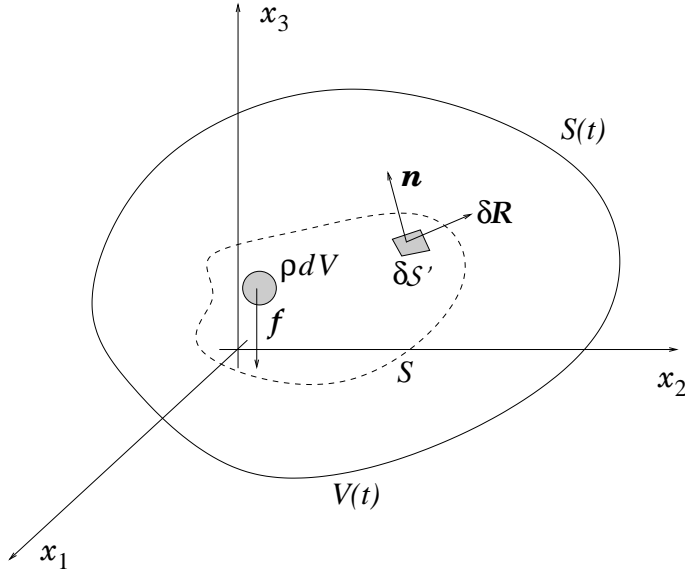


Figura 3.1

- forze di massa, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, definite per unità di massa e applicate agli elementi materiali di $V(t)$;
- forze di superficie, $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$, definite per unità di area, e applicate agli elementi superficiali della frontiera $S(t)$.

Postuliamo ora che il moto del fluido, originato dall'azione di tali forze, soddisfi in ogni istante al seguente principio:

La derivata materiale della quantità di moto associata al volume materiale V uguaglia in ogni istante il risultante delle forze applicate sui suoi elementi materiali. Dunque:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_k dV = \int_V \rho f_k dV + \int_S t_k dS \quad (3.3a)$$

o in forma vettoriale

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{t} dS \quad (3.3b)$$

3.3 Tensione in un punto

3.3.1 Il tensore delle tensioni

Utilizzando il teorema del trasporto, cioè la (2.11), e indicata con V' una porzione di V di cui sia S' la frontiera, la (3.3b) applicata al moto di V' , si scrive:

$$\int_{V'} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S'} \mathbf{t} dS \quad (3.4)$$

La (3.4) esprime un bilancio che deve risultare soddisfatto in ogni istante per una scelta arbitraria di V' .

Esaminiamo ora una fondamentale conseguenza della (3.4) quando si consideri il limite per $V' \rightarrow 0$. Sia ℓ^3 il volume istantaneamente occupato da V' . Osservando che le funzioni integrande sono funzioni limitate e applicando quindi il teorema della media, si ottiene che per $\ell \rightarrow 0$ gli integrali di volume risultano infinitesimi d'ordine superiore rispetto all'integrale di superficie. Segue

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{1}{\ell^2} \int_{S'} \mathbf{t} dS = 0 \quad (3.5)$$

cioè:

Il principio della quantità di moto si riduce, a livello locale, ad una condizione di equilibrio delle tensioni distribuite su una superficie chiusa infinitesima circostante il punto considerato.

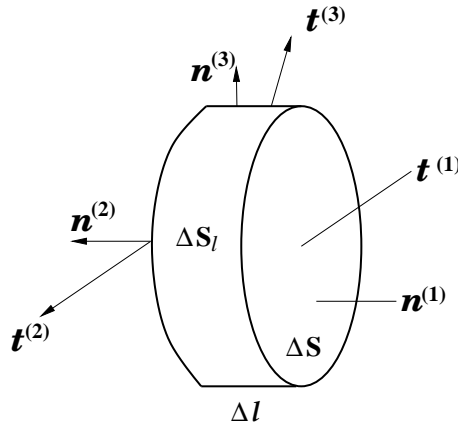


Figura 3.2

Si consideri ora il volume infinitesimo di forma cilindrica ΔV , mostrato in figura 3.2. La (3.4) porge:

$$\int_{\Delta S} \mathbf{t}^{(1)} dS + \int_{\Delta S} \mathbf{t}^{(2)} dS + \int_{\Delta S_\ell} \mathbf{t}^{(3)} dS + \int_{\Delta V} \rho \mathbf{g} dV = \int_{\Delta V} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$$

dove ΔS_ℓ è la superficie laterale del volume ΔV . Applicando il teorema del valor medio per calcolare gli integrali e considerando il limite per $\Delta \ell$ tendente a zero, si ottiene:

$$\mathbf{t}^{(1)} \Delta S + \mathbf{t}^{(2)} \Delta S = 0.$$

Considerando l'equazione precedente, si ottiene:

$$\mathbf{t}^{(1)} = -\mathbf{t}^{(2)}.$$

Si deduce quindi che la tensione esercitata sulle due facce di una superficie è uguale e contraria. In particolare il fluido interno a un volume V esercita su quello esterno una tensione che è uguale e contraria a quella esercitata dal fluido esterno al volume su quello interno.

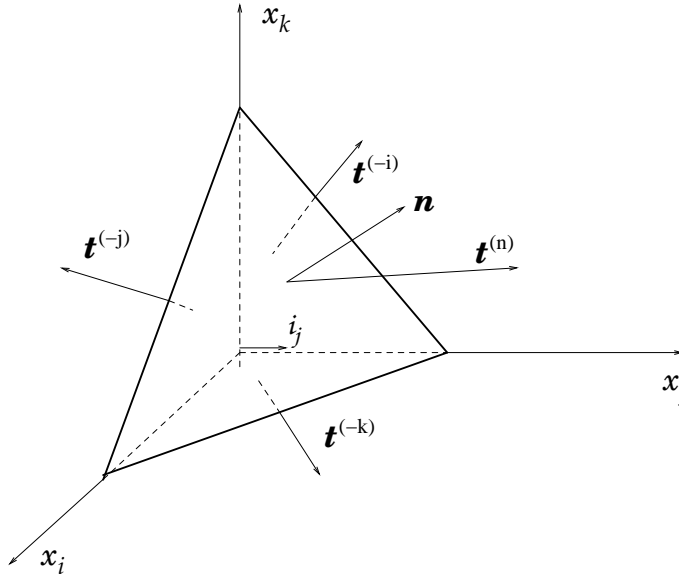


Figura 3.3

Esplicitiamo ora la (3.5) con riferimento al tetraedro mostrato nella figura 3.3 con vertice nel generico punto individuato dal vettore \mathbf{x} e tre facce parallele ai piani coordinati. Sia \mathbf{n} il versore normale alla quarta faccia (obliqua) di area dS .

Indichiamo inoltre, con $\mathbf{t}^{(n)}$ il vettore tensione agente su un elemento materiale di normale \mathbf{n} , dunque $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$. Sia inoltre $\mathbf{t}^{(-j)}$ il vettore tensione agente su un elemento materiale di normale $(-\mathbf{i}_j)$, con \mathbf{i}_j versore dell'asse x_j .

Essendo $dS \sim \ell^2$ e \mathbf{t} funzione continua della posizione, la (3.5) si riduce, in questo caso, alla:

$$\mathbf{t}^{(n)} + n_j \mathbf{t}^{(-j)} = 0 \quad (3.6)$$

con n_j coseno direttore di \mathbf{n} rispetto all'asse x_j e j indice sommato. La (3.6) discende immediatamente dalla (3.5) applicando il teorema della media e osservando che

$$dS^{(j)} = dS n_j \quad (3.7)$$

dove si è indicata con $dS^{(j)}$ l'area della faccia del tetraedro di normale \mathbf{i}_j e considerando $\ell \rightarrow 0$.

Ricordando che in precedenza si è mostrato che $\mathbf{t}^{(j)} = -\mathbf{t}^{(-j)}$. La (3.6) diventa allora

$$\mathbf{t}^{(n)} = n_j \mathbf{t}^{(j)} \quad (3.8)$$

La (3.8) mostra che è nota la tensione su qualsiasi elemento superficiale della stella di centro \mathbf{x} , non appena siano note le tensioni su tre elementi superficiali passanti per \mathbf{x} , paralleli ai piani coordinati. Se si denomina stato di tensione in \mathbf{x} l'insieme delle tensioni agenti su tutti gli elementi superficiali della stella di centro \mathbf{x} , segue che la conoscenza di tale stato di tensione richiede che siano assegnate nove funzioni della posizione e del tempo $T_{ij}(\mathbf{x}, t)$ cioè le 9 componenti rispetto all'asse x_i ($i = 1, 2, 3$) dei vettori tensione $\mathbf{t}^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$). Con tale significato di T_{ij} e detta t_i la componente di $\mathbf{t}^{(n)}$ rispetto all'asse x_i segue:

$$t_i = T_{ij} n_j \quad (3.9)$$

ove T_{ij} indica la componente lungo l'asse x_i di $\mathbf{t}^{(j)}$. Non è difficile mostrare che le T_{ij} costituiscono le componenti del un tensore doppio:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_1^{(1)} & t_1^{(2)} & t_1^{(3)} \\ t_2^{(1)} & t_2^{(2)} & t_2^{(3)} \\ t_3^{(1)} & t_3^{(2)} & t_3^{(3)} \end{pmatrix}$$

Posto $\mathbf{T} \equiv \{T_{ij}\}$ segue, in forma tensoriale

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (3.10)$$

Ribadiamo che le (3.10) consentono di determinare il vettore tensione in \mathbf{x} su qualsiasi piano passante per \mathbf{x} , se sono note le nove componenti T_{ij} del tensore \mathbf{T} in \mathbf{x} all'istante considerato.

Osserviamo infine che le componenti di \mathbf{T} a indici uguali sono dirette secondo le normali alle facce su cui agiscono, sono cioè **tensioni normali**. Le componenti a indici distinti, essendo dirette tangenzialmente alle facce su cui agiscono, sono **tensioni tangenziali**.

3.4 Forma differenziale delle equazioni del moto dei continui

La relazione (3.4) deve risultare soddisfatta per V' arbitrario. Inoltre le (3.10) suggeriscono la trasformazione

$$\int_{S'} t_i dS = \int_{S'} n_j T_{ij} dS \quad (3.11)$$

da cui, considerando il volume fisso V_0 che istantaneamente coincide con V' e la cui superficie è S_0 e utilizzando la trasformazione di Gauss, segue

$$\int_{S_0} t_i dS = \int_{V_0} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (3.12a)$$

o

$$\int_{S_0} \mathbf{t} dS = \int_{V_0} \nabla \cdot \mathbf{T}^T dV \quad (3.12b)$$

Sostituendo la (3.12b) nella (3.4) segue, data l'arbitrarietà di V_0 la relazione

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (3.13a)$$

o

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = \rho f_k + \frac{\partial T_{kj}}{\partial x_j} \quad (3.13b)$$

Poiché, come si vedrà nella sezione seguente \mathbf{T} è un tensore simmetrico, nella (3.13a) è indicato \mathbf{T} al posto di \mathbf{T}^T .

Le (3.13a-3.13b) sono le equazioni del moto di Cauchy. Esse risultano valide per qualsiasi continuo per il quale gli assiomi (3.1), (3.2) si rivelino appropriati.

3.5 Principio del momento della quantità di moto

Il principio del momento della quantità di moto per un continuo fluido può essere enunciato come:

Dato un continuo, di volume $V(t)$ e frontiera $S(t)$, in moto e soggetto a una distribuzione $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ di forze di volume e $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ di forze di superficie, vale la relazione seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \int_V \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV + \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS \quad (3.14)$$

con \mathbf{x} raggio vettore dell'elemento di volume dV (o di superficie dS) rispetto all'origine O del riferimento (x_1, x_2, x_3) .

In altre parole la derivata materiale del momento della quantità di moto associata al volume materiale all'istante t uguaglia il momento risultante delle forze applicate agli elementi materiali (di volume e superficie) del continuo in moto. La (3.14) può scriversi in forma scalare come segue:

$$\delta_{ijk} \left[\frac{d}{dt} \int_V \rho x_j v_k dV - \int_V \rho x_j f_k dV - \int_S x_j t_k dS \right] = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

ove si è indicato con δ_{ijk} il tensore di Ricci⁽¹⁾ e si è utilizzata la convenzione della somma sugli indici ripetuti.

Le (3.14), (3.15) devono risultare soddisfatte in ciascun istante e devono valere se applicate a una qualsiasi porzione V' del volume materiale V . Con riferimento a tale volume V' di frontiera S' , le (3.15) si scrivono:

$$\delta_{ijk} \left[\int_{V'} \rho x_j \frac{dv_k}{dt} dV - \int_{V'} \rho x_j f_k dV - \int_{S'} x_j t_k dS \right] = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.16)$$

dove si è utilizzata la trasformazione (2.11) e la ovvia

$$\delta_{ijk} \int_{V'} \rho v_j v_k dV = 0 \quad (3.17)$$

Trasformando l'integrale di superficie presente nella (3.16) in un integrale di volume attraverso la formula di Gauss segue, utilizzando anche la (3.9):

$$\delta_{ijk} \left\{ \int_{V'} \left(x_j \left[\rho \frac{dv_k}{dt} - \rho f_k - \frac{\partial T_{k\ell}}{\partial x_\ell} \right] - \delta_{j\ell} T_{k\ell} \right) dV' \right\} = 0 \quad (3.18)$$

(1)

$\delta_{ijk} = 0$ se almeno 2 indici sono uguali

$\delta_{ijk} = 1$ se $ijk=123, 231$ o 312

$\delta_{ijk} = -1$ se $ijk=321, 213$ o 132

Ricordando le equazioni del moto di Cauchy e data l'arbitrarietà di V' , la (3.18) impone:

$$\delta_{ijk}\delta_{j\ell}T_{k\ell} = \delta_{imn}T_{nm} = 0 \quad (3.19)$$

La (3.19) equivale a tre relazioni (una per ciascuna determinazione di i) di uguaglianza delle componenti a indici distinti del tensore \mathbf{T} , cioè

$$T_{\ell k} = T_{k\ell}. \quad (3.20)$$

3.6 Teorema della potenza meccanica

Consideriamo la (3.13b) e moltiplichiamone ambo i membri per v_k . Si ottiene

$$\rho v_k \frac{dv_k}{dt} - \rho f_k v_k - v_k \frac{\partial T_{kj}}{\partial x_j} = 0$$

Una semplice trasformazione fornisce

$$\frac{1}{2}\rho \frac{d(v_k^2)}{dt} - \rho f_k v_k - \frac{\partial(v_k T_{kj})}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} T_{kj} = 0$$

Data la simmetria del tensore \mathbf{T} segue inoltre

$$\frac{1}{2}\rho \frac{d(v_k^2)}{dt} - \rho f_k v_k - \frac{\partial(v_k T_{kj})}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) T_{kj} = 0.$$

Integrando su V e applicando la trasformazione di Gauss si ottiene:

$$\int_V \frac{1}{2}\rho \frac{d(v_\ell v_\ell)}{dt} dV = \int_V \rho f_k v_k dV + \int_S v_k n_j T_{kj} dS - \int_V D_{kj} T_{kj} dV \quad (3.21)$$

Si definisca ora:

$$\mathcal{E}_c = \int_V \frac{1}{2}\rho v_\ell v_\ell dV = \int_V \frac{1}{2}\rho [v_1^2 + v_2^2 + v_3^2] dV \quad (3.22)$$

l'energia cinetica associata al volume materiale V . La (3.21) assume la forma:

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_V (\mathbf{T} : \mathbf{D}) dV \quad (3.23)$$

dove si è indicato con il simbolo $:$ il prodotto fra due tensori eseguito operando la somma dei prodotti fra le componenti corrispondenti dei due tensori. La (3.23) mostra che:

La derivata materiale dell'energia cinetica associata a un volume materiale uguaglia la somma della potenza associata all'azione delle forze esterne (di volume e di superficie) applicate agli elementi materiali (di volume e di frontiera) e della potenza spesa dalle forze interne per deformare gli elementi materiali.

Quest'ultimo contributo, cioè il termine energetico espressione della potenza spesa perché abbiano luogo le variazioni di volume e di forma degli elementi richiede un'interpretazione termodinamica. Parte di tale potenza è legata ad una variazione dell'energia interna (termodinamica) del fluido, parte è associata ad uno scambio termico fra fluido ed esterno. L'esplicitazione di tale termine richiede che sia formulata un'ipotesi sulla natura fisica del continuo che consenta di istituire un legame fra stato di tensione e stato cinematico: ciò sarà oggetto del capitolo 5

FONDAMENTI TERMODINAMICI

Dove si determina come gli scambi termici influenzano il moto dei fluidi e viceversa



Immagine di Coyau / Wikimedia Commons / CC BY-SA 3.0

4.1 Stato termodinamico di un sistema fluido

4.1.1 Variabili di stato

Presentiamo alcuni richiami di Termodinamica che hanno lo scopo di completare l'analisi dell'evoluzione del sistema fluido nel contesto delle sue interazioni con l'esterno, di natura anche termodinamica. Fenomeni di altra natura (elettromagnetica, chimica, chimico fisica, etc...) saranno considerati assenti.

Un sistema continuo in moto subisce una "trasformazione" nel senso che ne evolve lo "stato", quest'ultimo essendo caratterizzato da quantità fisiche dette "quantità di stato". Precedentemente si è esaminato lo stato cinematico che risulta descrivibile, per esempio, attraverso la conoscenza delle funzioni $v_k(\mathbf{x}, t)$, ($k = 1, 2, 3$). La componente dinamica dello stato del sistema si è rivelata caratterizzabile attraverso le funzioni $T_{ij}(\mathbf{x}, t)$, ($i, j = 1, 2, 3$), componenti del tensore delle tensioni.

Nella supposta assenza di fenomeni di natura elettromagnetica, chimica, fisico-chimica, etc., la conoscenza dello stato del sistema si completa assegnandone le variabili termodinamiche. La definizione classica di queste fa riferimento a condizioni di equilibrio meccanico e termico del sistema. Si vedrà in seguito come, in condizioni di quiete, lo stato di tensione risulta caratterizzabile nota la sola pressione, che è una variabile termodinamica che consente di determinare lo stato termodinamico del sistema fluido (a meno che questo non sia incompressibile, nel qual caso p costituisce una variabile di natura puramente meccanica). A un sistema fluido in equilibrio termico e meccanico è poi possibile associare, come insegna la Termodinamica classica, un ben definito valore di una ulteriore variabile, di fondamentale importanza, la temperatura (assoluta) T . La temperatura è una proprietà fisica scalare di un sistema che misura il suo stato termico. Se due sistemi in contatto termico hanno una diversa temperatura, esiste un flusso di calore (energia termica) dal sistema più caldo a quello più freddo, che può avvenire per conduzione, convezione o irraggiamento, fino a che non si raggiunge l'equilibrio termico e i due sistemi hanno la medesima temperatura.

È utile precisare che la temperatura non misura la quantità di energia termica o calore di un sistema anche se è a essa legata.

Rimandiamo ai testi di Termodinamica per una più approfondita discussione. Ci limitiamo qui a ribadire che essa fa riferimento a configurazioni di equilibrio termico e meccanico del sistema. Altre quantità "di stato", energia interna, entropia, entalpia, etc. si rivelano necessarie e verranno richiamate nel seguito. Esse risultano legate fra loro, in generale, da relazioni che definiscono lo stato termodinamico del sistema in esame e diconsi equazioni di stato.

Saranno oggetto del nostro studio i cosiddetti “fluidi termodinamici”, sistemi cioè per la definizione del cui stato termodinamico è sufficiente la conoscenza dei valori attuali assunti da due “variabili” di stato. Ne sono esempi i liquidi e gli aeriformi con stato chimico ben definito.

4.1.2 Coefficienti di dilatazione (isobaro) e di comprimibilità (isotermo)

L'equazione che definisce la densità di un fluido in funzione del suo stato termodinamico può essere espressa nella forma

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad \text{oppure} \quad \rho = \rho(p, T) \quad (4.1)$$

donde

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp \quad (4.2)$$

dove i pedici p e T a secondo membro individuano, come d'uso, la variabile mantenuta fissa nell'operazione di derivazione parziale.

Definiamo il 'coefficiente di dilatazione isobaro' α , avente le dimensioni dell'inverso di una temperatura, nella forma:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (4.3)$$

e il 'coefficiente di comprimibilità isotermo' nella forma:

$$\epsilon^{-1} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (4.4)$$

donde

$$d\rho = -\alpha \rho dT + \rho \epsilon^{-1} dp \quad (4.5)$$

La (4.5) non fornisce informazioni maggiori della (4.2). Vedremo tuttavia che essa risulta più conveniente nel caso dei liquidi poiché i coefficienti α ed ϵ , funzioni in generale dello stato termodinamico (dunque, ad es., di T e p) presentano nel caso dei liquidi un comportamento particolarmente semplice.

Il caso del gas perfetto

Molti gas reali (fra questi l'aria) soddisfano in modo più o meno approssimato all'equazione di stato, detta del 'gas perfetto':

$$pV = n\mathcal{R}T \quad (4.6)$$

essendo V il volume del gas e n il numero di moli. La costante \mathcal{R} (detta 'universale' poiché il suo valore dipende solo dalle unità di misura adottate per p , V e T), se viene adottato il sistema internazionale, vale 8.314 J/(mole K) .

Indicata con \mathcal{M} la massa del gas e con m la massa molare (detta anche peso molecolare relativo) che è la massa di una singola mole (es: $m_{H_2O} \cong 18$ unità di massa atomica, essendo l'unità di massa atomica pari a $1,66 \times 10^{-24} \text{ g} = \frac{1}{6,022 \times 10^{23}} \text{ g}$) risulta

$$n = \frac{\mathcal{M}}{m} \quad (4.7)$$

Dunque

$$pV = \frac{\mathcal{M}}{m} \mathcal{R}T \quad (4.8)$$

e

$$p \frac{V}{\mathcal{M}} = \frac{p}{\rho} = \frac{1}{m} \mathcal{R}T \quad (4.9)$$

Dalla (4.9) segue, per un gas perfetto,

$$\alpha = \frac{1}{T} \quad (4.10)$$

e

$$\epsilon^{-1} = \frac{1}{p} \quad (4.11)$$

Dunque un gas perfetto risulta sempre meno dilatabile isobaricamente al crescere della temperatura e sempre meno comprimibile al crescere della pressione. Nessun materiale reale obbedisce esattamente alla (4.9). Essa è, come noto, giustificabile sulla base di semplici considerazioni di teoria cinetica fondate su un modello di comportamento 'limite' del gas, da cui i gas reali si discostano sempre in misura più o meno accentuata. Molti fenomeni che riguardano gas reali sono tuttavia interpretabili soddisfacentemente sulla base del modello rappresentato dalla (4.9). Ciò vale in particolare per la gran parte dei fenomeni studiati dalla Gasdinamica.

Equazione di stato dei liquidi

Descriviamo ora lo stato termodinamico di un liquido, considerato qui quale caso particolare di fluido termodinamico. A pressioni vicine a quella ordinaria si ha:

$$\alpha = \alpha_0 [1 + \alpha' (T - T_0)] \quad (4.12)$$

con T_0 temperatura di riferimento e α_0 il coefficiente di dilatazione isobaro alla temperatura di riferimento. I coefficienti (α_0, α') sono sensibilmente costanti entro un ampio intervallo di valori della pressione.

Analogamente il coefficiente ϵ presenta variazioni non trascurabili con la pressione che possono spesso valutate, entro un ampio intervallo di temperature, con la

$$\epsilon = \epsilon_0[1 + \epsilon'(p - p_0)] \quad (4.13)$$

dove p_0 e ϵ_0 indicano rispettivamente la pressione di riferimento e il modulo di comprimibilità isoterma nelle condizioni di riferimento.

Si noti inoltre che ϵ' risulta in generale positivo, i liquidi risultano cioè sempre meno comprimibili (in modo isoterma) al crescere della pressione. I valori di ϵ_0 ed ϵ' sono sensibilmente indipendenti dalla temperatura entro un intervallo relativamente ampio.

In numerose applicazioni è poi sufficiente trascurare nelle (4.12), (4.13) i contributi associati ad α' ed ϵ' . In tal caso la (4.5) risulta immediatamente integrabile nella forma:

$$\ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = -\alpha_0(T - T_0) + \epsilon_0^{-1}(p - p_0) \quad (4.14)$$

da cui

$$\rho = \rho_0 \exp [-\alpha_0(T - T_0) + \epsilon_0^{-1}(p - p_0)] \quad (4.15)$$

e se

$$\alpha_0(T - T_0) \ll 1, \quad \epsilon_0^{-1}(p - p_0) \ll 1 \quad (4.16)$$

si ottiene

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha_0(T - T_0) + \epsilon_0^{-1}(p - p_0)] \quad (4.17)$$

La (4.17) costituisce una relazione che assolve in modo egregio al ruolo di equazione di stato dei liquidi. Poiché il valore di α_0 , per la maggior parte dei liquidi, è assai piccolo ($O(10^{-4}[^\circ K]^{-1})$ per $T_0 = 273^\circ K$) e il valore di ϵ_0 assai grande ($O(\simeq 10^9[N/m^2])$ per $p_0 = 10^5 N/m^2$), la (4.17) rivela che i liquidi possono in talune circostanze (condizioni sensibilmente isoterme e differenze di pressione relativamente modeste) considerarsi come “incomprimibili” e “indilatabili”. Va tuttavia osservato che tanto la comprimibilità quanto la dilatabilità dei liquidi si rivelano proprietà di imprescindibile importanza per la comprensione di talune classi di fenomeni, quali la propagazione di onde acustiche o la formazione di moti termoconvettivi.

Concludiamo notando che, nell’accezione comune, alla denominazione “incomprimibile” si associa la costanza (nel tempo e nello spazio) della densità del fluido (dunque $\alpha_0 = \epsilon_0^{-1} = 0$) si ingloba cioè la condizione di indilatabilità in quella di incomprimibilità. Essendo tale prassi estremamente generalizzata (in particolare nella letteratura anglosassone) per evitare confusioni interpretative essa verrà adottata nel seguito.

Stati barotropici

In particolari stati, detti “barotropici”, è possibile associare all’equazione di stato (di un gas o di un liquido) ulteriori condizioni che consentono di pervenire a una relazione biunivoca fra le sole variabili densità e pressione, del tipo:

$$\rho = \rho(p) \quad (4.18)$$

L’importanza di tali stati è legata alla possibilità di disaccoppiare (sotto ulteriori condizioni che verranno precisate) il problema termodinamico da quello meccanico.

Un esempio (ma non l’unico) di stato barotropico, si ottiene imponendo la condizione di costanza della temperatura ($T = T_0$) per un gas perfetto. In tal caso l’equazione di stato diventa

$$\frac{p}{\rho} = \text{cost} \quad (4.19)$$

Qualora invece si consideri una trasformazione adiabatica isoentropica si ha

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{cost} \quad (4.20)$$

con k rapporto fra i calori specifici a pressione e volume costante.

L’acqua in condizioni isoentropiche soddisfa alla relazione

$$\frac{p + B}{p_0 + B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \quad (4.21)$$

con $B = 3 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $n = 7$ e p_0, ρ_0 pressione e densità di riferimento. La (4.21) è significativa fino a valori di pressione dell’ordine di 10^5 bar .

Naturalmente il più semplice degli stati barotropici è quello caratterizzato dalla costanza della densità, stato usualmente denominato ‘incomprimibile’. Tale stato, che è in particolare caratteristico dei liquidi soggetti a variazioni di pressione non molto grandi, è semplicemente descritto dall’equazione di stato

$$\rho = \text{costante} \quad (4.22)$$

4.2 Primo principio della termodinamica

4.2.1 Formulazione classica

È noto che l’interazione di un sistema evolvente (in particolare in moto) con l’esterno può essere interpretata in termini di “scambi” energetici.

Nei capitoli precedenti si è introdotto lo “scambio di lavoro” L fra sistema (fluido) ed esterno. Esso risulta associato all’azione delle forze esterne (di volume e di superficie) applicate agli elementi materiali (di volume e di superficie) del sistema. Il segno di L si assume positivo se lo scambio è attuato nel senso dal sistema verso l’esterno. È emerso inoltre come alla rapidità con cui avviene tale scambio dinamico sia associata l’evoluzione dell’energia meccanica del sistema. La deformabilità di questo influenza tale evoluzione introducendo un termine energetico interpretabile appunto come potenza spesa dal sistema per dar luogo alle variazioni di forma e di volume conseguenti al moto.

Ci si propone ora di dare significato “termodinamico” a quest’ultimo termine. A questo scopo è necessario considerare un bilancio energetico nel quale interviene la seconda componente fondamentale di scambio: lo “scambio di calore” (o scambio termico) Q . È noto dall’esperienza che uno scambio di calore fra le diverse parti di un sistema reale è sempre associato a una disuniforme distribuzione della temperatura e si attua nel senso di una attenuazione di tale disuniformità. Assumiamo nota dalla Termodinamica la nozione di “scambio termico” che, ricordiamo, è assunto positivo se attuato nel senso dall’esterno al sistema e viceversa.

Il primo principio della Termodinamica, con riferimento a un sistema materiale che subisce una trasformazione elementare caratterizzata dagli scambi energetici dQ e dL si enuncia nella forma:

$$dQ - dL = d\mathcal{E}_t \quad (4.23)$$

dove si è indicata con \mathcal{E}_t una funzione di stato interpretabile quale “misura” del contenuto energetico del sistema. Diremo \mathcal{E}_t “energia totale” del sistema (fluido in particolare).

La (4.23) suggerisce, in particolare, la costanza di \mathcal{E}_t per un sistema completamente isolato, per il quale cioè $dQ = dL = 0$.

4.2.2 Formulazione integrale Lagrangiana

Riformuliamo il I principio della Termodinamica con riferimento al volume materiale $V(t)$. Sia dt l’intervallo di tempo elementare cui si riferiscono gli scambi energetici elementari di cui nella (4.23). Essendo il volume materiale in moto, cioè in condizioni di non-equilibrio termico e meccanico, risulterà necessario tener conto della non uniforme distribuzione delle quantità di stato e degli scambi energetici.

Dalla (4.23) è dunque possibile ottenere:

$$\frac{d\mathcal{E}_t}{dt} = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.24)$$

avendo indicato con \mathbf{n} il versore normale alla superficie diretto positivamente verso l'esterno e con \mathbf{q} il vettore “flusso termico specifico”. Questo è definito come vettore tale che la sua proiezione lungo la direzione normale all'areola dS moltiplicata per dS rappresenta la potenza termica scambiata attraverso tale areola. La sua direzione e verso coincidono con direzione e verso relativi al processo di propagazione del calore. I segni dei termini a secondo membro della (4.24) sono conseguenza delle convenzioni adottate per i segni degli scambi dinamico e termico.

Sottraendo alla (4.24) la relazione che esprime il teorema della potenza meccanica segue:

$$\frac{d\mathcal{E}_i}{dt} = \int_V (\mathbf{T} : \mathbf{D}) dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.25)$$

dove si è indicata con \mathcal{E}_i la porzione di \mathcal{E}_t distinta dall'energia cinetica \mathcal{E}_c ($\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_i$). La quantità \mathcal{E}_i è detta “energia interna” e, data la supposta assenza di fenomeni di natura elettromagnetica, chimica, fisico-chimica, etc..., \mathcal{E}_i è totalmente di natura termodinamica.

La (4.25) suggerisce che la potenza spesa dal volume materiale $V(t)$ perché avvengano variazioni di forma e di volume si ritrova in parte come variazione dell'energia interna termodinamica associata a V in parte come scambio termico del sistema fluido con l'esterno.

4.2.3 Formulazione differenziale: l'equazione dell'energia

La (4.25) rappresenta la formulazione integrale del primo principio della termodinamica. Infatti, introdotta l'energia interna specifica $e(\mathbf{x}, t)$ definita dalla relazione:

$$\mathcal{E}_i = \int_V \rho e dV \quad (4.26)$$

e ricordando il teorema del trasporto (2.11) segue:

$$\frac{d\mathcal{E}_i}{dt} = \int_V \rho \frac{de}{dt} dV \quad (4.27)$$

Infine se si applica la trasformazione di Gauss all'integrale di superficie a secondo membro della (4.25), segue

$$\int_V \left(\rho \frac{de}{dt} - (\mathbf{T} : \mathbf{D}) + \nabla \cdot \mathbf{q} \right) dV = 0 \quad (4.28)$$

Osservando che la validità della precedente equazione sussiste quando a V si sostituisca una qualsiasi sua porzione V' , segue che l'annullarsi dell'integrale a primo membro implica che sia soddisfatta per ogni \mathbf{x} e t la relazione:

$$\rho \frac{de}{dt} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (4.29)$$

La relazione (4.29) costituisce, insieme all'equazione di continuità e all'equazione del moto una delle equazioni fondamentali della meccanica dei continui. Attraverso la (4.29) il problema meccanico risulta accoppiato con quello termodinamico, cioè la determinazione dello stato meccanico del sistema non può prescindere dalla conoscenza dello stato termodinamico e viceversa. Vedremo nel seguito come sia possibile in talune circostanze disaccoppiare il problema.

Allo scopo di proseguire l'analisi sarà tuttavia necessario introdurre opportune ipotesi sulla natura termodinamica del sistema fluido in esame, istituendo un legame fra flusso di calore e distribuzione di temperatura. Tale legame, insieme all'equazione di stato e al legame fra \mathbf{T} , tensore delle tensioni, e lo stato cinematico locale, determina completamente la natura fisica del sistema fluido.

4.3 Secondo principio della termodinamica

4.3.1 Conservazione ed evoluzione

Come noto, il secondo principio della Termodinamica dichiara l'impossibilità del realizzarsi di una certa classe di processi, pur tali da verificare i già discussi principi di conservazione della massa, della quantità di moto, e il primo principio della termodinamica. L'equivalenza fra scambi termici e dinamici espressa dal I principio con riferimento a trasformazioni cicliche è infatti solo da intendere in termini di "conservazione". La profonda differenza che sussiste fra i due tipi di scambi e che viene caratterizzata facendo appello a un carattere di "disordine" (o evolutivo) proprio degli scambi termici in contrapposizione all'ordine" caratteristico degli scambi dinamici, si concretizza in ultima analisi nella irrealizzabilità di certi processi. Questa si rivela interpretabile ponendo che l'esterno al sistema subisca una "evoluzione" conseguente alla trasformazione in atto nel sistema. Tale evoluzione è associata alla componente disordinata di scambio; in particolare

nel corso di una trasformazione ciclica tale evoluzione può sempre ridursi a un acquisto di calore, da parte dell'esterno.

4.3.2 Entropia

Nello studio dei fenomeni termici si rivela di particolare importanza l'esame di una classe di trasformazioni, dette "reversibili", che costituiscono un modello limite da cui le trasformazioni reali si discostano sempre in misura più o meno accentuata.

Una trasformazione si dice "reversibile" se realizzabile indifferentemente nei due sensi. Tale nozione è compatibile solo con sistemi caratterizzati da quantità di stato uniformemente distribuite, in assenza di moto e che passino nel corso della trasformazione attraverso una successione di stati di equilibrio termico e meccanico con l'esterno.

Nelle condizioni esposte lo scambio dinamico si limita a quello associato all'azione delle forze di pressione agenti in corrispondenza della frontiera del sistema. In una trasformazione elementare in cui un sistema di massa \mathcal{M} subisce una dilatazione volumetrica $\mathcal{M}d(1/\rho)$ il lavoro elementare scambiato è $\mathcal{M}pd(1/\rho)$. Infatti è facile intuire che $dL = pdV$ e data la costanza della massa $\mathcal{M}(= \rho V)$, $dV = -V(d\rho/\rho) = \rho V d(1/\rho) = \mathcal{M}d(1/\rho)$. Osservando che si ha qui $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_i$, la (4.23) si scrive per una trasformazione reversibile

$$dq = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (4.30)$$

con $\mathcal{M}dq = dQ$ e $\mathcal{M}de = d\mathcal{E}_i$. La considerazione dei cicli reversibili consente, come noto dalla Termodinamica, l'introduzione di una nuova funzione di stato, l'entropia S del sistema⁽¹⁾ definita dalla relazione:

$$\frac{dQ}{T} = dS \quad (4.31)$$

Posto

$$S = s\mathcal{M} \quad (4.32)$$

con s entropia specifica (qui, notiamo, uniformemente distribuita data la supposta reversibilità della trasformazione) la (4.31) diventa

$$\frac{dq}{T} = ds \quad (4.33)$$

⁽¹⁾È noto che un ciclo reversibile può considerarsi quale sovrapposizione di infiniti cicli di Carnot adiacenti e che ciò implica

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

dove, data la reversibilità, T è la temperatura attuale del sistema o dell'esterno indifferentemente.

Dunque: la temperatura è il fattore integrante che rende esatto il differenziale dq .

4.3.3 Secondo principio: formulazione integrale

Estendiamo la definizione di entropia al caso del volume materiale $V(t)$ in moto. Si ha:

$$\mathcal{S} = \int_V \rho s(\mathbf{x}, t) dV \quad (4.34)$$

Il secondo principio della Termodinamica può essere formulato con riferimento al moto del volume materiale $V(t)$ nella forma:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \geq - \int_S \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS \quad (4.35)$$

L'equazione precedente evidenzia che l'entropia del sistema fluido in moto, soggetto cioè a una trasformazione reale varia non solo per effetto degli scambi termici con l'esterno (rappresentati dal secondo membro della (4.35), ma anche a causa di una produzione di entropia associata alle cause di irreversibilità presenti durante il moto. Quest'ultima componente risulta sempre positiva per il II principio.

Le cause principali di irreversibilità sono da ricondursi a scostamenti dello stato del sistema fluido dalle condizioni di equilibrio e, quindi, alla presenza di fenomeni di trasporto (di massa, di energia, di quantità di moto) tendenti al ripristino di tali condizioni.

4.4 Riflessione sulla definizione di quantità di stato in condizioni di non equilibrio

È qui il caso, prima di concludere questo paragrafo, di riprendere e precisare brevemente una osservazione già proposta. Nelle considerazioni svolte si è fatto uso di quantità di stato (quali entropia e temperatura) che la Termodinamica classica introduce associandole a stati di equilibrio della materia, caratterizzati da proprietà meccaniche e termiche uniformemente distribuite nel tempo e nello spazio. L'estensione di tali nozioni allo studio di sistemi materiali in condizioni di 'non equilibrio', in particolare sistemi fluidi in moto, richiede alcune precisazioni.

La definizione della densità ρ , funzione della posizione \mathbf{x} e del tempo t non è ristretta al caso di sistemi in equilibrio. Analogamente la definizione della energia interna specifica $e(\mathbf{x}, t)$ quale emerge dal I principio della Termodinamica risulta indipendente dall'ipotesi di equilibrio del sistema, essendo ricondotta alla valutazione degli scambi dinamico e termico del sistema con l'esterno fra due diversi

istanti, quantità queste del tutto indipendenti dall'esistenza di una condizione di equilibrio. La conoscenza della distribuzione spazio-temporale di due variabili di stato, ρ ed e , ci consente allora di definire le altre quantità di stato (T , s , etc.) imponendo che esse soddisfino localmente e ad ogni istante alle relazioni termodinamiche di stato valide per gli stati di equilibrio. Si assume in altre parole che tali relazioni siano trascurabilmente influenzate dal non annullarsi dei valori locali dei gradienti spaziali e temporali di velocità, densità ed energia interna.

LE EQUAZIONI DEL MOTO E LE CONDIZIONI AL CONTORNO

Dove si studiano le equazioni che governano il moto dei fluidi

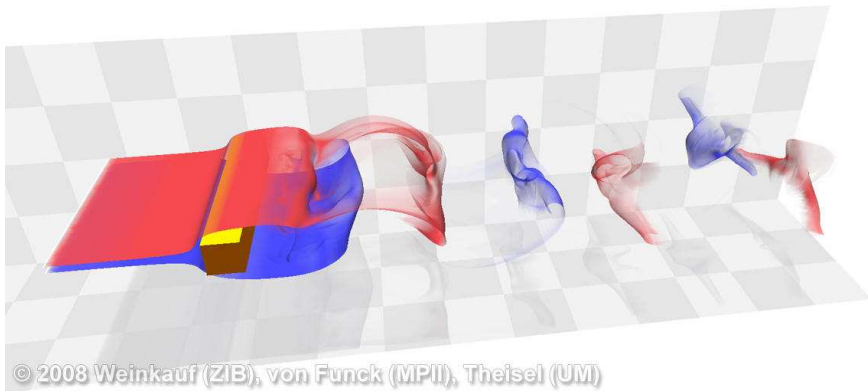


Immagine da

<https://people.mpi-inf.mpg.de/weinkauff/gallery/images/vonfunck08a/SquareCylinder04.jpg>

5.1 Introduzione

Nei capitoli 2, 3 e 4 si sono esaminate le proprietà cinematiche e dinamiche del moto dei materiali continui introducendo alcuni costrutti mentali, in particolare i tensori della 'velocità di deformazione' e della 'tensione' che si rivelano idonei a descrivere tali proprietà. L'analisi esposta non ha richiesto la precisazione della natura fisica del corpo esaminato. Se ne è solo ipotizzata la continuità, cioè la validità del modello continuo quale schema metodologicamente appropriato all'interpretazione del comportamento macroscopico del corpo.

Se si interpreta lo stato di tensione del corpo come la sua risposta 'dinamica' allo stato di moto applicato, la particolare natura meccanica del materiale è individuata dal 'tipo di risposta' meccanica.

Il legame analitico attraverso cui si descrive la struttura della risposta meccanica è detto *legame costitutivo*. Tale nozione è evidentemente suscettibile di generalizzazione ai casi in cui si esaminino altri aspetti (di natura termodinamica, chimica, elettromagnetica, etc...) del comportamento fisico del materiale continuo considerato.

È oggetto della prima parte di questo capitolo lo studio dei legami costitutivi relativi a fluidi che sono in grado di esercitare tensioni tangenziali apprezzabili. La seconda parte del capitolo sarà invece dedicata alla derivazione delle equazioni del moto dei fluidi viscosi. Tale risultato richiede l'utilizzo di tutte le nozioni acquisite in precedenza. Occorrerà in particolare introdurre il legame costitutivo che definisce i fluidi viscosi nelle equazioni del moto valide per qualsiasi continuo alla Cauchy: si otterranno così le equazioni di Navier-Stokes, cioè le equazioni fondamentali della Meccanica dei Fluidi. Tuttavia per completare la posizione del problema è necessario determinare le condizioni al contorno da associare a dette equazioni. Esse sono di natura cinematica e dinamica e in generale sono ottenute imponendo la continuità (così come definita nell'analisi matematica) attraverso il contorno dell'intensità e del flusso della quantità trasportata. Esamineremo infine le forme semplificate che il problema assume nel caso in cui la densità del fluido sia costante. Tali fluidi sono spesso definiti 'incomprimibili' anche se tale definizione non è del tutto appropriata.

5.2 Stato di tensione nei 'fluidi' in quiete

Una prima fondamentale proprietà che ci consente di caratterizzare dal punto di vista meccanico i materiali continui nello stato fluido è il loro comportamento dinamico in condizioni di quiete.

Postuliamo dunque: Il vettore tensione in un 'fluido' in quiete è normale all'elemento superficiale sul quale agisce, cioè

$$\mathbf{t}^{(n)} = -p\mathbf{n} \quad (5.1)$$

con p quantità non negativa detta 'pressione'.

Lo scalare p risulta indipendente da \mathbf{n} , cioè dall'orientamento dell'elemento superficiale. Ciò segue se si osserva che la (5.1) equivale all'annullarsi delle componenti a indici distinti del tensore delle tensioni, cioè delle tensioni tangenziali. Infatti proiettando la (5.1) lungo la direzione i e ricordando la (3.9), si ottiene

$$-pn_i = n_j T_{ij} \quad (5.2)$$

cioè

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{22} = T_{33} = -p \\ T_{12} &= T_{23} = T_{31} = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

o

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (5.4)$$

La (5.4) viene spesso enunciata nella forma: il tensore delle tensioni in un fluido in quiete è '*isotropo*'. Le sue componenti cartesiane ortogonali non cambiano infatti al ruotare del riferimento, cioè lo stato di tensione rivela eguali caratteristiche in tutte le direzioni dello spazio uscenti dal punto considerato.

Si noti poi che lo scalare p è in generale funzione di \mathbf{x} , cioè varia con la posizione. Ciò è conseguenza del bilancio dinamico espresso dalle (3.13a) dove \mathbf{v} è ora identicamente nullo; da questo discende che la distribuzione spaziale della pressione in condizioni di quiete dipende solo dalla distribuzione delle forze di massa e della densità.

5.3 Fluidi viscosi

5.3.1 Caratteristiche generali dei fluidi viscosi

È patrimonio dell'esperienza l'osservazione che gli stati di *non equilibrio* della materia, caratterizzati cioè da una non uniforme distribuzione di qualche proprietà fisica (in particolare termica o meccanica), danno luogo al manifestarsi di *fenomeni di trasporto* e in particolare di scambi dinamici e termici fra elementi materiali prossimi. Tali fenomeni presentano una caratteristica fondamentale che

li accomuna: qualsiasi sia la particolare proprietà fisica che risulta disuniformemente distribuita, essi agiscono nel senso di una attenuazione di tale disuniformità. Tale tendenza verso l'equilibrio è una caratteristica dei sistemi materiali indipendente dal loro particolare stato di aggregazione.

La risposta dinamica con cui un fluido *viscoso* reagisce a una distribuzione disuniforme del suo stato cinematico si presenta come un esempio di questa tendenza della materia verso l'equilibrio. Esaminiamo sul piano intuitivo le caratteristiche che è ragionevole attendersi siano proprie di tale risposta.

Essa deve anzitutto annullarsi quando l'elemento di disuniformità scompare. Dunque lo stato di tensione deve ridursi allo stato isotropo descritto dall'espressione (5.1) quando il fluido si trova in condizione di quiete.

L'ipotesi più semplice sullo scostamento dello stato di tensione in un punto dal comportamento espresso dalla (5.1) in presenza di una disuniforme distribuzione dello stato cinematico, è che esso dipenda da quantità che forniscono una misura *locale* di tale disuniformità; in altre parole che sia assente una dipendenza dalla *storia* del moto. La misura *locale* più ovvia sembra essere data dal valore del (∇v) valutato nel punto considerato. Tuttavia la (1.22b) suggerisce la presenza nel gradiente della velocità di una componente associata a una rotazione rigida degli elementi materiali uscenti dal punto considerato. A tale componente, presente anche nei sistemi continui rigidi, è ragionevole ritenere non sia associato alcuno stato di tensione.

Da tale quadro emerge dunque che un fluido reagisce con uno stato di tensione a un suo stato di velocità di deformazione, quest'ultimo essendo sempre associato a una disuniforme distribuzione di velocità. La citata tendenza della materia verso l'equilibrio si tradurrà allora nella tendenza dello stato di tensione a eliminare lo stato di velocità di deformazione.

Se poi il materiale fluido presenta proprietà fisiche indipendenti dalla posizione, è cioè omogeneo, è lecito ipotizzare che la struttura della risposta dinamica non cambi da punto a punto.

Se, infine, il materiale fluido presenta proprietà fisiche indipendenti dalla direzione dello spazio, è cioè isotropo, la struttura della risposta dinamica sarà presumibilmente dotata di analoga proprietà.

Il concetto di fluidità che emerge dalle considerazioni esposte precedentemente può essere espresso in forma assiomatica. Assumeremo gli enunciati che seguono, quali *assiomi costitutivi* dei fluidi viscosi.

I - T è una funzione continua di D ed è indipendente da ogni altra quantità cinematica: $T = f(D)$

II - T non dipende esplicitamente da x (Omogeneità)

III - Non v'è alcuna direzione preferita nello spazio (Isotropia)

IV - Se $\mathbf{D} = 0$, \mathbf{T} si riduce a $-p\mathbf{I}$

Si osservi che il *legame costitutivo* $\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{D})$ soddisfa automaticamente, essendo espresso in forma tensoriale, al requisito di essere *invariante* rispetto a una variazione del sistema di coordinate. In altre parole, tale variazione induce in generale variazioni nei valori delle componenti di \mathbf{T} e \mathbf{D} ma non del legame che fra esse sussiste attraverso la funzione \mathbf{f} .

Una questione più sottile riguarda l'invarianza del legame costitutivo rispetto a variazioni del sistema di riferimento. Truesdell & Noll (1965) denominano *Principio di obiettività materiale* il postulato, che ritengono sia da accettarsi come intuitivo, secondo cui un legame costitutivo deve risultare *invariante rispetto a qualsiasi variazione del sistema di riferimento*, anche *non inerziale*. In altre parole il comportamento del materiale non deve cambiare anche se osservato da un sistema di riferimento che accelera. Da questo punto di vista i legami costitutivi si comportano diversamente dalle equazioni del moto che non presentano affatto tale invarianza.

Gli assiomi I-IV sono detti **assiomi di Stokes** e i fluidi per cui essi sono validi sono detti **fluidi di Stokes** o **Stokesiani**. (Si noti che si assume tacitamente che \mathbf{T} dipenda dallo stato termodinamico del fluido).

È possibile mostrare che i citati assiomi conducono a un legame costitutivo:

$$\mathbf{T} = (\alpha - p)\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2 \quad (5.5)$$

dove α , β e γ sono funzioni solo degli invarianti principali di \mathbf{D} . Per la derivazione della (5.5) si rimanda a testi specializzati.

5.3.2 Legame costitutivo dei fluidi viscosi

Se ai postulati I-IV si aggiunge l'ipotesi di linearità del legame costitutivo si ottiene la forma fondamentale

$$T_{ij} = \left(-p + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (5.6)$$

Per la dimostrazione della (5.6) si rimanda a testi specializzati.

Notiamo esplicitamente che l'assioma di omogeneità implica che le quantità λ a μ non dipendono dalla posizione. Esse dipendono tuttavia dallo stato termodinamico del sistema fluido. I coefficienti λ e μ , sono detti rispettivamente **secondo**

e primo coefficiente di viscosità. Le loro dimensioni sono $ML^{-1}T^{-1}$. Nel Sistema Internazionale l'unità di misura è Nsm^{-2} . La dipendenza di λ e μ dallo stato termodinamico è approfondita in trattati specializzati.

La (5.6), può scriversi in forma vettoriale

$$\mathbf{T} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (5.7)$$

La viscosità dinamica μ è la proprietà del fluido che controlla l'intensità della sua risposta dinamica alla velocità di deformazione. Una seconda proprietà, detta **viscosità cinematica**, controlla invece la rapidità con cui gli effetti viscosi si propagano nel fluido. La viscosità cinematica ν è definita dalla relazione

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

La sua denominazione nasce dalle dimensioni di ν che sono puramente cinematiche $[\nu] = L^2T^{-1}$. L'unità del sistema internazionale è $m^2 s^{-1}$.

Le (5.7) sono talvolta denominate *legge di Newton-Cauchy-Poisson*.

In un fluido incompressibile e indilatabile (spesso denominato solo incompressibile), l'equazione di stato ($\rho = \text{cost}$) assicura che il valore della densità è indipendente dallo stato termodinamico del sistema. Dal punto di vista matematico si osserva che il problema termodinamico e quello meccanico risultano disaccoppiati, cioè il valore della pressione e della temperatura non influenzano il moto del fluido. Considerando un fluido incompressibile si introduce la **pressione meccanica** p_m definita come la media delle tensioni normali che agiscono sulle superfici parallele ai piani coordinati:

$$p_m = -\frac{1}{3} (T_{11} + T_{22} + T_{33}) \quad (5.8)$$

Si osservi che il legame costitutivo assume per un fluido incompressibile la forma semplificata:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}.$$

Se il fluido è comprimibile si ritiene che la differenza tra la pressione meccanica e quella termodinamica dipenda linearmente dalla divergenza della velocità, cioè dalla velocità di espansione, attraverso il coefficiente di **viscosità di volume** κ :

$$p_m - p = \kappa \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5.9)$$

Per la maggior parte dei fluidi κ assume valori molto piccoli per cui è ragionevole approssimare la pressione meccanica con la pressione termodinamica. Questa ipotesi è detta "**ipotesi di Stokes**".

È facile mostrare, usando la (5.6) e (5.8) che

$$p - p_m = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5.10)$$

e quindi che l'ipotesi di Stokes implica $\lambda = -2/3\mu$. Quest'ultimo risultato è confermato dalla teoria cinetica se il fluido è un gas monoatomico. Mentre, quale conseguenza del II principio della termodinamica si trova:

$$\mu \geq 0 \quad (3\lambda + 2\mu) \geq 0 \quad (5.11)$$

L'ipotesi di Stokes è ragionevolmente accurata per gas e liquidi in molte situazioni di interesse ingegneristico, almeno per i fluidi Newtoniani e può essere considerata un'ulteriore caratteristica dei fluidi Newtoniani.

5.4 Formulazione del problema del moto

5.4.1 Le equazioni di Navier-Stokes

Consideriamo un fluido viscoso che occupa la regione $V(t)$ dello spazio e di cui è $S(t)$ la frontiera. Procediamo alla deduzione delle equazioni che ne governano il moto.

Introducendo il legame (5.6) nelle equazioni di Cauchy (3.13b) si ottiene:

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = \rho f_k + \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} (-p + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu D_{jk}) \quad (5.12)$$

o, in forma vettoriale:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla(p - \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \quad (5.13)$$

Nel caso in cui λ e μ possano ritenersi sensibilmente indipendenti dalla posizione (dunque che le distribuzioni di pressione e temperatura risultino sensibilmente uniformi) le (5.12) assumono una forma semplificata. Il termine $\partial D_{jk} / \partial x_j$ può infatti risciversi nella forma

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5.14)$$

Ma per la condizione di uguaglianza delle derivate seconde miste la (5.14) diventa:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5.15)$$

donde la (5.1.15.12)a assume la forma

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = \rho f_k - \frac{\partial p}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5.16)$$

o, in forma vettoriale:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (5.17)$$

Nel caso di fluido incompressibile le (5.16) e (5.17) si riducono alle equazioni seguenti

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = \rho f_k - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5.18)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5.19)$$

Le (5.18) ((5.19)) costituiscono le equazioni fondamentali della Meccanica dei fluidi viscosi, e sono dette **equazioni di Navier-Stokes**.

E poi interessante notare che

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (5.20)$$

e dunque, ritenendo il fluido incompressibile

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (5.21)$$

La quantità vettoriale $\nabla \times \mathbf{v}$ che verrà introdotta nel capitolo 7, è detta vorticità ed è denotata con $\boldsymbol{\omega}$. Segue che l'equazione di Navier-Stokes può essere scritta anche nella forma

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p - \mu \nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (5.22)$$

Si vedrà nei capitoli seguenti che esiste una vasta classe di moti per cui si può ritenere $\boldsymbol{\omega} = 0$. L'equazione del moto in tali casi si riduce all'**equazione di Eulero**:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p \quad (5.23)$$

in cui non appaiono termini legati alla viscosità, cioè gli effetti viscosi non influenzano il moto del fluido.

5.4.2 Le condizioni al contorno

Condizioni al contorno cinematiche

In corrispondenza di un contorno materiale che separa un fluido da un altro mezzo, si richiede che risulti continua la componente della velocità tangente al contorno. Infatti una discontinuità della componente tangenziale della velocità attraverso l'interfaccia causerebbe la presenza di una tensione tangenziale elevata (a rigori infinita) in grado di contrastare la differenza della velocità relativa tra il fluido e l'altro continuo.

La condizione che impone la continuità della componente tangenziale della velocità quando il contorno separa un fluido da un solido, è detta **condizione di aderenza** (no-slip condition in inglese) e richiede che la componente della velocità del fluido tangente all'interfaccia risulti uguale alla corrispondente componente di velocità del solido. In particolare se la superficie solida è ferma, la velocità del fluido tangente alla superficie deve annullarsi.

Un'ulteriore relazione coinvolge le componenti della velocità normali all'interfaccia fra due continui. Nella situazione in cui l'interfaccia sia mobile nel tempo, come ad esempio nel caso di interfaccia tra aria e acqua nello studio del moto ondoso, supponendo che la posizione dell'interfaccia sia descritta dalla relazione

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (5.24)$$

si impone che

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = 0. \quad (5.25)$$

La (5.25) equivale a imporre che l'interfaccia sia una superficie materiale, cioè una superficie composta sempre delle stesse particelle. La dimostrazione che la (5.25) implica che la superficie (5.24) sia costituita sempre dalle stesse particelle e viceversa viene fornita di seguito per il lettore interessato e presuppone una comprensione approfondita del contenuto del capitolo 1.

Sia $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = 0$ l'equazione della superficie di frontiera del fluido in moto (supposto soddisfacente alle condizioni di continuità). In tal caso:

1. \mathcal{F} deve soddisfare alla condizione

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{F} = 0 \quad (5.26)$$

2. tale condizione implica che la superficie $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = 0$ è sempre costituita dalle stesse particelle (cioè è una superficie materiale).

L'affermazione (1) si dimostra agevolmente osservando che la velocità normale della superficie mobile $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = 0$ è data dalla relazione

$$v_n = - \frac{\partial \mathcal{F} / \partial t}{|\nabla \mathcal{F}|} \quad (5.27)$$

La (5.27) discende imponendo l'annullarsi del differenziale della funzione \mathcal{F} per una variazione infinitesima di posizione lungo la normale alla superficie nell'intervallo infinitesimo dt . Si ha

$$d\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial n} dn + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} dt = 0 \quad (5.28)$$

donde, osservando che $dn/dt = v_n$, la (5.27).

Imponendo che non vi sia 'distacco' o 'compenetrazione' cioè che velocità normali del fluido e della frontiera coincidano, si ha

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathcal{F} / |\nabla \mathcal{F}|) \quad (5.29)$$

essendo \mathbf{n} il versore normale alla superficie.

Dal confronto delle (5.27) e (5.29) segue:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{F} = 0 \quad (5.30)$$

cioè la (5.26).

Supponiamo, reciprocamente, che valga la (5.26) e poniamo, ricordando la (1.1a):

$$G(\mathbf{X}, t) = \mathcal{F}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = 0 \quad (5.31)$$

Ricordiamo che \mathbf{X} è la coordinata materiale. Cioè \mathbf{X} rappresenta la posizione iniziale delle particelle fluide che si trovano sulla superficie all'istante t e quindi l'equazione $G(\mathbf{X}, t) = 0$ descrive la posizione iniziale dell'interfaccia.

La (5.31) implica:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{d\mathcal{F}}{dt} \quad (5.32)$$

o, per la (5.26):

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad (5.33)$$

Imponendo l'annullarsi del differenziale della funzione G per variazioni infinitesime di posizione lungo la normale alla superficie nell'intervallo temporale dt si ottiene

$$v_n = -\frac{\partial G / \partial t}{\partial G / \partial n} = 0 \quad (5.34)$$

La (5.34) mostra che la velocità normale di propagazione della superficie $G = 0$ attraverso lo spazio delle \mathbf{X} risulta nulla e quindi la superficie $G(\mathbf{X}, t) = 0$ è costituita sempre dalle stesse particelle. Poiché la superficie mobile $\mathcal{F} = 0$ è la trasformata, ad istanti diversi, della stessa superficie $G = 0$ relativa alla configurazione iniziale ne discende che anche la superficie mobile $\mathcal{F} = 0$ è costituita sempre dalle stesse particelle.

Si noti che, qualora la frontiera \mathcal{F} sia fissa nello spazio, come nel caso del contorno di un solido fermo, la condizione (5.25) porge

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{F} = 0$$

che, osservando che il versore normale alla frontiera è $\nabla \mathcal{F} / |\nabla \mathcal{F}|$ mostra che la componente di velocità normale alla frontiera deve annullarsi. Questa costituisce la **condizione di non-compenetrazione** che asserisce che non è possibile né la compenetrazione né il distacco del fluido dal contorno solido. Se

il contorno solido è in moto con velocità \mathbf{v}_s , le condizioni di aderenza e non-compenetrazione richiedono che le componenti della velocità del fluido normali e tangenti al contorno siano uguali alle corrispondenti componenti di \mathbf{v}_s .

Le condizioni al contorno dinamiche

In corrispondenza dell'interfaccia S fra due continui (fluidi) (in particolare nel caso di superfici libere) il vettore tensione deve risultare continuo a meno del possibile contributo dovuto alla presenza di un effetto non trascurabile della tensione interfacciale o superficiale. Utilizzando il legame costitutivo (5.6) e indicando con uno e due apici rispettivamente le quantità relative al primo e secondo fluido e trascurando l'effetto del secondo coefficiente di viscosità, la condizione può scriversi nella forma:

$$-p'' + 2\mu'' D''_{ij} n_i n_j + p' - 2\mu' D'_{ij} n_i n_j = \pm \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{su } S) \quad (5.35a)$$

per la componente normale all'interfaccia, e

$$\mu'' D''_{ij} \nu_i n_j - \mu' D'_{ij} \nu_i n_j = 0 \quad (5.35b)$$

per la componente tangenziale. Nella (5.35b) ν_i rappresenta il coseno direttore della tangente all'interfaccia nel punto considerato rispetto all'asse x_i .

La presenza di un salto nella componente normale della tensione, pari a

$$\pm \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.36)$$

è dovuta all'effetto della tensione superficiale. Nella (5.35a) σ è la tensione superficiale associata all'interfaccia fra i due continui e R_1, R_2 sono i raggi di curvatura principali; si deve scegliere il segno $+$ se l'interfaccia tra il fluido superiore, indicato con un apice, e quello inferiore, indicato con due apici, è concava. Si noti che la tensione superficiale σ non è una proprietà fisica di un fluido bensì dell'interfaccia fra due fluidi. Non esiste dunque la tensione superficiale dell'acqua ma la tensione superficiale dell'interfaccia aria-acqua che è pari a circa 7.5×10^{-2} N/m e la tensione superficiale aria-olio che risulta pari a circa 0.32 N/m. Nella figura 5.1 è mostrato un esempio in cui gli effetti della tensione superficiale sono importanti: un insetto riesce a non affondare nell'acqua grazie all'azione della tensione superficiale.

Considerando l'interfaccia che separa un liquido da un aeriforme, posto che velocità e suoi gradienti siano dello stesso ordine di grandezza nei due fluidi, è lecito ritenere che le variazioni di pressione e le tensioni viscosive siano assai più



Figura 5.1: Insetti che 'camminano' sull'acqua
(Immagine da http://3.bp.blogspot.com/-FP1ku9sqVtI/UbBuJFPuKhI/AAAAAAAAAnI/t-gA17tk-n8/s1600/tensione_superficiale_gerridi.jpg)

piccole nel gas che nel liquido. Assumeremo dunque che lo stato di tensione nel gas si riduca all'esistenza di una pressione uniformemente distribuita ($T_{ij} = -p_0\delta_{ij}$).

La condizione dinamica sulla superficie libera conduce quindi a:

$$-p + 2\mu D_{ij}n_i n_j = -p_0 \pm \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{su } \mathcal{S}) \quad (5.37a)$$

$$D_{ij}\nu_i n_j = 0 \quad (5.37b)$$

mentre la condizione di continuità della velocità tangenziale non è necessaria poiché il moto del gas non è in genere tenuto in conto. Resta tuttavia valida la condizione cinematica che coinvolge le componenti della velocità normale all'interfaccia.

MOTI UNIDIREZIONALI

Dove si determinano le caratteristiche di alcuni semplici moti



Trans-Alaska oil pipeline. Foto di Luca Galuzzi da Wikimedia commons.

Le maggiori difficoltà incontrate nella soluzione del problema del moto incomprimibile di fluidi viscosi termoconduttori, sono legate alla presenza, nelle equazioni che lo governano, di termini non lineari, i termini convettivi.

Esistono, tuttavia, circostanze non banali nelle quali il contributo di tali termini risulta identicamente nullo e le equazioni di Navier-Stokes assumono forma lineare. Ciò avviene in particolare nel caso di moti unidirezionali, in cui il vettore velocità risulta indipendente dalla coordinata associata alla direzione del moto a causa dell'equazione di continuità.

6.1 Moti unidirezionali rettilinei

Siano dunque (x, y, z) coordinate cartesiane con x direzione del moto e y asse normale al piano in cui avviene il moto ed (u, v, w) il corrispondente vettore velocità. Si ipotizza che il moto sia unidirezionale e rettilineo cioè che:

$$v = w = 0 \quad (6.1)$$

L'equazione di continuità porge:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.2)$$

ciò implica che u dipende solo dalle variabili y e z . Non è difficile mostrare allora che

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (6.3)$$

Nel campo della gravità, detto ϑ l'angolo che la direzione x forma con il vettore \mathbf{g} , le equazioni di Navier-Stokes si scrivono:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \cos \vartheta + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6.4a)$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \sin \vartheta \quad (6.4b)$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.4c)$$

Le (6.4) mostrano un risultato di notevole importanza: 'nel caso di moti incomprimibili unidirezionali, la pressione è distribuita idrostaticamente sui piani ortogonali alla direzione del moto'. In altre parole il carico piezometrico risulta indipendente dalle coordinate y e z .

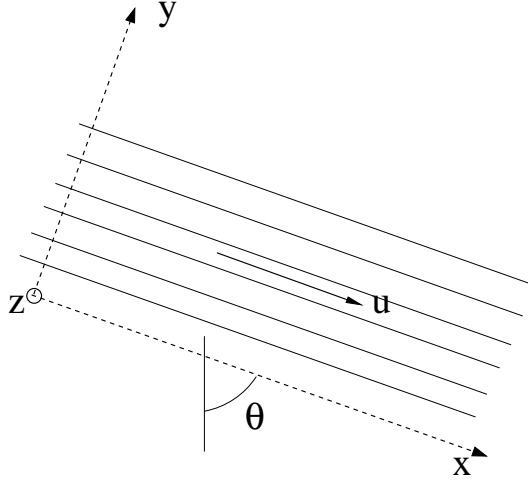


Figura 6.1

Inoltre, osservando che (si veda la fig. 6.1)

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \cos \vartheta = -\frac{\partial h}{\partial x} \rho g \quad (6.5)$$

con h carico piezometrico la (6.4a) si scrive

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6.6)$$

Inoltre essendo u indipendente da x , $\partial h / \partial x$ risulta funzione solo del tempo. Sia

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial x} = -\gamma i(t) \quad (6.7)$$

con $i(t)$ funzione detta *pendenza motrice* che fornisce una misura del gradiente di pressione necessario per bilanciare le azioni viscose e l'eventuale azione dell'inerziale locale. Nel caso stazionario la (6.6) diventa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\gamma}{\mu} i \quad (6.8)$$

Moti per i quali la teoria risulta valida sono moti unidirezionali il cui contorno è una superficie cilindrica le cui generatrici hanno direzione x . Tale superficie può essere mobile nella direzione x o fissa e il moto può essere indotto dal suo movimento, dalla presenza di un gradiente di pressione nella direzione x o dall'azione della gravità.

6.2 Alcuni esempi

Esaminiamo alcuni esempi di moti stazionari unidirezionali.

(i) Moto piano alla Couette-Poiseuille

Nel caso in cui il moto si realizza nel piano xy (fig. 6.2), la (6.8) diventa

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\gamma}{\mu} i \quad (6.9)$$

con i costante data l'ipotesi di stazionarietà.

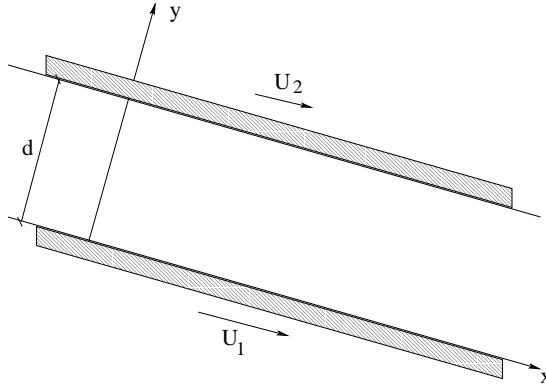


Figura 6.2

Senza perdita di generalità si può assumere che il moto avvenga fra i piani $y = 0$ ed $y = d$. Alla (6.9) occorre associare opportune condizioni al contorno. Sia:

$$u = U_1 \quad (y = 0) \quad (6.10a)$$

$$u = U_2 \quad (y = d) \quad (6.10b)$$

Il sistema differenziale (6.9-6.10) è immediatamente integrabile nella forma:

$$u = \frac{\gamma}{2\mu} i(d-y)y + \frac{U_2 - U_1}{d}y + U_1 \quad (6.11)$$

Esaminiamo alcuni casi particolari:

- $i = 0, U_1 \neq 0, U_2 \neq 0$ (fig. 6.3). In tal caso il fluido è messo in moto solo dallo scorrimento delle pareti che lo contengono, il diagramma di velocità è lineare (moto piano alla Couette)

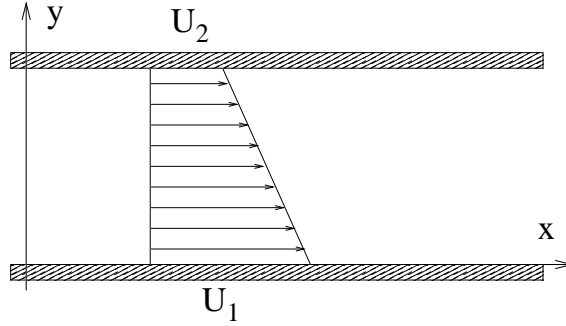


Figura 6.3

- $i \neq 0, U_1 = U_2 = 0$ (fig.6.4). In tal caso il moto è originato da un gradiente di pressione imposto dall'esterno e/o dalla forza di gravità, il diagramma di velocità è parabolico (moto piano alla Poiseuille) con il massimo sull'asse.

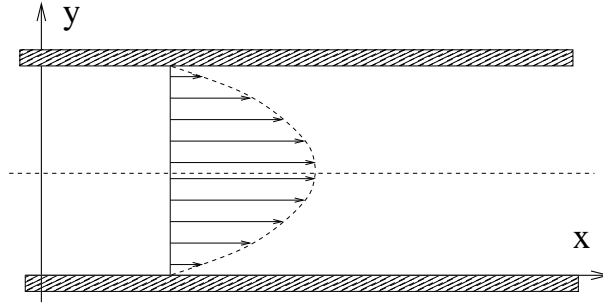


Figura 6.4

- $i \neq 0, U_1 \neq 0, U_2 \neq 0$ (fig. 6.5).

Il diagramma di velocità è parabolico (moto piano alla Couette-Poiseuille). Il massimo (o minimo) si trova in

$$y_m = \frac{d}{2} + \frac{\mu}{\gamma i d} (U_2 - U_1) \quad (6.12)$$

Valutiamo infine la 'portata volumetrica per unità di larghezza' q , cioè il volume che attraversa la sezione trasversale di larghezza unitaria nell'unità di tempo.

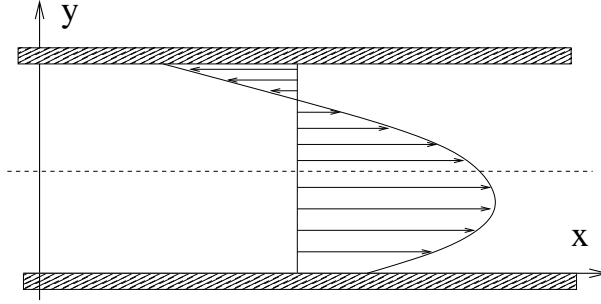


Figura 6.5

Si ottiene

$$\begin{aligned}
 q &= \int_0^d u dy = \int_0^d \left\{ U_1 + \frac{U_2 - U_1}{d} y + \frac{\gamma i}{2\mu} y(d - y) \right\} dy = \\
 &= \frac{d}{2}(U_2 + U_1) + \frac{\gamma i d^3}{12\mu}
 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Sulla base di quanto esposto nei primi cinque capitoli è possibile calcolare le componenti del tensore delle tensioni e della velocità di deformazione. L'unico elemento non nullo del tensore \mathbf{D} è:

$$\mathbf{D}_{xy} = \frac{1}{2} \frac{du}{dy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma i}{2\mu} d + \frac{U_2 - U_1}{d} - \frac{\gamma i}{\mu} y \right] \quad (6.14)$$

Di conseguenza gli elementi sulla diagonale principale del tensore delle tensioni \mathbf{T} sono tutti uguali a $-p$ mentre gli unici termini a indici distinti e non nulli sono

$$\mathbf{T}_{xy} = \mathbf{T}_{yx} = 2\mu \mathbf{D}_{xy} = \frac{\gamma i}{2} d + \frac{U_2 - U_1}{d} \mu - \gamma i y \quad (6.15)$$

È quindi possibile calcolare la tensione tangenziale τ , ossia la tensione esercitata dal fluido nella direzione del moto su un elemento di superficie di normale $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ e tangente $\boldsymbol{\nu} = (1, 0, 0)$

$$\tau = \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) = (1, 0, 0) \cdot (\mathbf{T}_{21}, \mathbf{T}_{22}, \mathbf{T}_{23}) = \mathbf{T}_{21} \quad (6.16)$$

È quindi facile vedere che la tensione tangenziale dipende linearmente da y e varia tra il valore $(\gamma i/2)d + \mu(U_2 - U_1)/d$, assunto per $y = 0$, e il valore $-(\gamma i/2)d + \mu(U_2 - U_1)/d$ assunto per $y = d$.

(ii) Moto alla Poiseuille entro condotti circolari

Consideriamo il moto 'pienamente sviluppato' entro condotti circolari. Lo studio di tale moto è originariamente dovuto a Hagen (1839) & Poiseuille (1840)

In coordinate cilindriche (r, θ, z) , la (6.8) diviene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) u = -\frac{\gamma i}{\mu} \quad (6.17)$$

Assumendo la simmetria $(\partial/\partial\vartheta \equiv 0)$ del moto, essa si riduce alla:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) u = -\frac{\gamma i}{\mu} \quad (6.18)$$

cui va associata la condizione al contorno

$$u = 0 \quad (r = R) \quad (6.19)$$

dove R è il raggio del condotto. La (6.18) si integra immediatamente con la condizione al contorno (6.19) e fornisce

$$u = \frac{\gamma i}{4\mu} (-r^2 + c_1 \ln r + c_2) \quad (6.20)$$

con c_1 e c_2 costanti determinate dalla imposizione della (6.19) e della condizione di simmetria in corrispondenza dell'asse

$$\frac{du}{dr} = 0 \quad (r = 0) \quad (6.21)$$

Si ottiene

$$u = \frac{\gamma i}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (6.22)$$

cioè il diagramma di velocità è dato da un parabolide di rotazione.

La 'portata volumetrica' si ottiene facilmente

$$Q = \int_0^R u 2\pi r dr = \frac{\gamma i \pi R^4}{8\mu} = \frac{\gamma \pi R^4}{8\mu \ell} \Delta h \quad (6.23)$$

dove (Δh) è la caduta di *carico piezometrico* lungo un tronco di condotto lungo ℓ . La linearità della relazione fra Q e Δh fu appunto ottenuta sperimentalmente da Hagen e Poiseuille. La precisione con cui la dipendenza di Q dalla prima potenza di Δh e dalla IV potenza di R è verificata sperimentalmente, rappresenta una conferma indiretta della validità della condizione di aderenza alla parete e del legame costitutivo adottato per i fluidi viscosi.

La tensione tangenziale τ_{rz} sul contorno si indica sinteticamente con τ ed è data dalla relazione:

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=R} = -\frac{1}{2}\gamma i R \quad (6.24)$$

La resistenza totale lungo un tronco lungo ℓ si scrive

$$(2\pi R\ell)\tau = (2\pi R\ell) \left(-\frac{1}{2}\gamma i R \right) = (\pi R^2)\gamma \Delta h \quad (6.25)$$

La (6.25) può essere ricavata alternativamente attraverso il principio della quantità di moto in forma integrale, applicato a un tronco di corrente lungo ℓ .

La potenza dissipata per unità di volume per effetto viscoso, tenendo presente i risultati esposti nel paragrafo 3.6, si ottiene valutando il termine $\mathbf{T} : \mathbf{D}$ nel caso in esame. Si ottiene:

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} = \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^2 = \frac{(\gamma i r)^2 \varrho}{4\nu} \quad (6.26)$$

La potenza dissipata in un tronco di lunghezza ℓ è dunque

$$\int_0^\ell dx \int_0^R \mathbf{T} : \mathbf{D} \, 2\pi r dr = \frac{\ell(\gamma i R^2)^2 \pi \varrho}{8\nu} = \gamma(i\ell)Q \quad (6.27)$$

La soluzione precedentemente descritta è valida fino a quando il regime di moto si mantiene laminare e la turbolenza è assente. La transizione da regime di moto laminare a quello turbolento avviene quando disturbi del campo di moto, sempre presenti per cause diverse, tendono ad amplificarsi invece che ad attenuarsi. Il fenomeno della transizione fu studiato per la prima volta da Reynolds nel suo famoso esperimento (figura 6.6) e ha luogo quando il numero di Reynolds $Re = U_0 2R/\nu$ supera un valore critico che si aggira attorno a 2000 (U_0 è la velocità mediata sulla sezione). Reynolds visualizzò il progressivo passaggio da un moto ordinato a uno disordinato tramite un sottile filamento di colorante rilasciato nell'acqua. Finché la corrente si mantiene laminare, il filamento di colorante risulta ben definito e si mantiene sottile (figura 6.6a). All'aumentare del numero di Reynolds, si osserva l'insorgere di ondulazioni del filamento colorato (figura 6.6c) che diventano sempre più complicate al crescere di Re (figura 6.6b). Il regime di moto turbolento, molto più frequente in natura, sarà studiato nei capitoli successivi.

(iii) Strato di Rayleigh

Si consideri ora una piastra piana indefinita che, all'istante $t = 0$, viene messa in movimento con velocità U costante e in direzione parallela alla piastra. Il

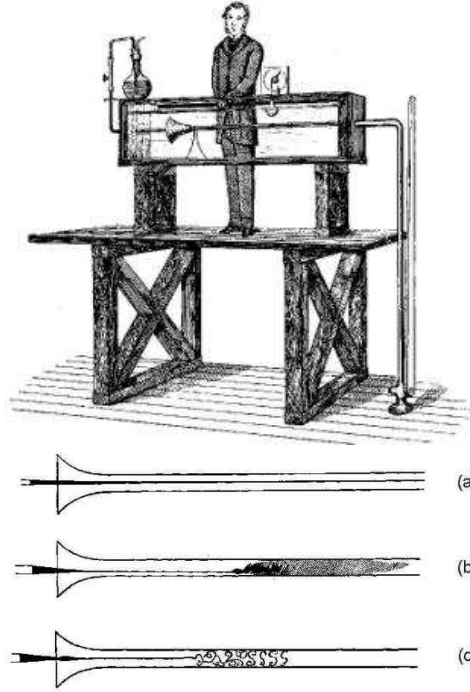


Figura 6.6: Esperimento di Reynolds (immagine estratta dalla sua memoria originale del 1883) che ha consentito di determinare le condizioni di transizione da regime di moto laminare a turbolento. (a) moto laminare; (b) moto turbolento; (c) regime di transizione. (immagine da http://misclab.umeoce.maine.edu/boss/classes/SMS_491_2003/Week_5.htm)

piano della piastra coincide col piano $y = 0$. Un fluido che occupa il semispazio $y > 0$ viene messo in moto per effetto delle tensioni tangenziali viscosi agenti in corrispondenza della piastra.

La (6.4a) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.28)$$

che deve essere risolta con le condizioni al contorno

$$u(t) = U \quad (y = 0, t \geq 0) \quad (6.29)$$

$$u \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty, t \geq 0) \quad (6.30)$$

e iniziale

$$u(y) = 0 \quad (t < 0, y \geq 0) \quad (6.31)$$

Si noti che l'equazione (6.28) è 'l'equazione del calore'. L'indipendenza da x e z della condizione iniziale (6.31) suggerisce che analoga proprietà sia soddisfatta dalla soluzione.

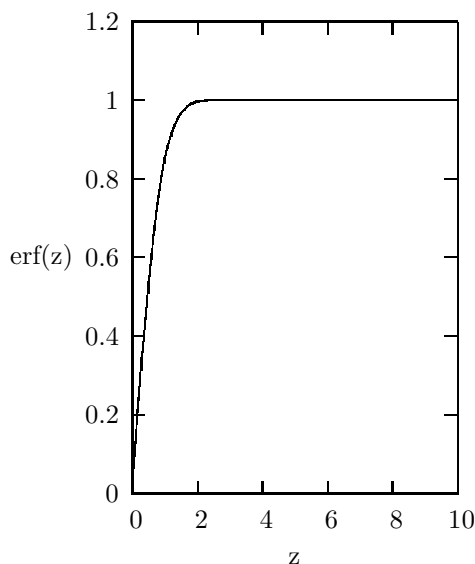


Figura 6.7

Dopo aver introdotto la variabile ausiliaria $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$, che consente di trasformare la (6.28) in un'equazione alle derivate ordinarie, si ottiene la soluzione della (6.28):

$$u = U \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}} \exp(-\eta^2) d\eta \right] = U \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] \quad (6.32)$$

È facile mostrare che la (6.32) soddisfa la (6.28), le condizioni al contorno (6.29-6.30) e la condizione iniziale (6.31). Nella (6.32) compare la 'funzione errore' erf, il cui andamento è rappresentato in figura 6.7.

La (6.32) fornisce la legge con cui la velocità imposta in $y = 0$ tende, per diffusione viscosa, a propagarsi in tutti i punti della regione occupata dal fluido. Il profilo di velocità, per valori diversi di t è mostrato in figura 6.8.

Che il parametro adimensionale da cui il fenomeno dipende debba coinvolgere solo le grandezze y, ν e t nella forma $(y/\sqrt{\nu t})$ discende facilmente anche da considerazioni di natura dimensionale.

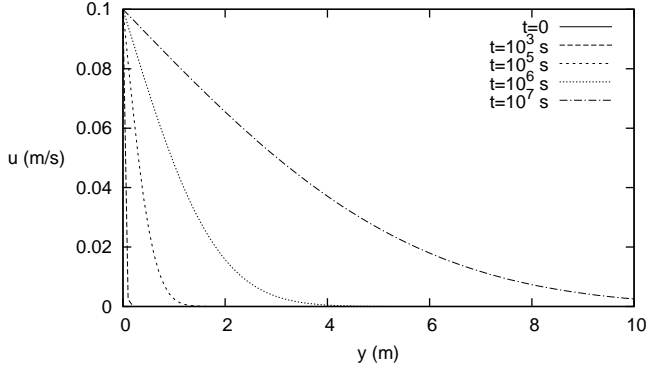


Figura 6.8: profili di velocità per diversi tempi. La velocità della piastra è pari a 0.1 m/s e il fluido è acqua.

Si noti infatti che la lunghezza caratteristica ℓ del fenomeno, che misura la distanza alla quale si è propagata la variazione di velocità è, all'istante t , ancora

$$\ell \sim \sqrt{\nu t}. \quad (6.33)$$

In modo equivalente si può affermare che la velocità di diffusione degli effetti viscosi risulta proporzionale a $\sqrt{\nu/t}$.

(iv) Strato di Stokes

Esaminiamo ora il moto dovuto all'oscillazione periodica di una piastra piana indefinita (figura 6.9). Anche questo campo di moto, come il precedente, rivela l'azione smorzante esercitata dagli effetti viscosi. Si consideri una piastra piana indefinita che oscilla nel suo piano ($y = 0$) secondo la legge:

$$u = \frac{U}{2} (e^{i\omega t} + c.c.) \quad (y = 0) \quad (6.34)$$

dove *c.c.* indica per complesso coniugato. Se il semispazio $y > 0$ è occupato da un fluido viscoso incompressibile, dopo un transitorio iniziale determinato appunto dalle condizioni iniziali, il campo di velocità tende ad assumere una struttura periodica in t caratterizzata dalla stessa pulsazione (frequenza angolare) ω imposta dalla oscillazione della parete.

Inoltre poiché la velocità oscilla in $y = 0$, il senso di propagazione delle variazioni di velocità si inverte ad ogni semiperiodo. Ciò implica che il fenomeno diffusivo non procederà oltre una certa distanza dalla parete. La (6.33) ci consente di valutarne l'ordine di grandezza. Essendo $t \sim T \sim (\omega)^{-1}$ con T periodo dell'oscillazione, segue $\ell \sim \sqrt{\nu/\omega}$.

Tale risultato è immediatamente verificabile determinando la soluzione del problema. Posto, come suggerisce la (6.34)

$$u = \frac{1}{2}F(y)e^{i\omega t} + c.c. \quad (6.35)$$

e sostituendo nella (6.4a) segue:

$$\frac{d^2 F}{dy^2} - \left(\frac{i\omega}{\nu}\right) F = 0 \quad (6.36)$$

La (6.36) è immediatamente risolubile. Segue:

$$u = \left[c_1 \exp\left(-\frac{y}{\sqrt{2\nu/\omega}}(1+i)\right) + c_2 \exp\left(\frac{y}{\sqrt{2\nu/\omega}}(1+i)\right) \right] e^{i\omega t} + c.c. \quad (6.37)$$

con c_1 e c_2 costanti.

La condizione al contorno per $y \rightarrow \infty$ impone che c_2 risulti nulla. La (6.34) fornisce $c_1 = \frac{U}{2}$. La soluzione è, dunque:

$$u = \frac{U}{2} e^{-\frac{y}{\sqrt{2\nu/\omega}} + i\left(\omega t - \frac{y}{\sqrt{2\nu/\omega}}\right)} + c.c. \quad (6.38)$$

La (6.38) può porsi nella forma

$$u = U e^{-y/\sqrt{2\nu/\omega}} \cos\left(\omega t - \frac{y}{\sqrt{2\nu/\omega}}\right) \quad (6.39)$$

La figura 6.9 mostra la velocità a diversi istanti durante il ciclo di oscillazione. Anche in questo caso l'oscillazione di velocità si propaga nel mezzo viscoso in forma di 'onda viscosa' la cui ampiezza si smorza esponenzialmente mentre ne varia la fase. Lo spessore caratteristico dello strato fluido interessato dal fenomeno è, non inaspettatamente, $\sqrt{2\nu/\omega}$.

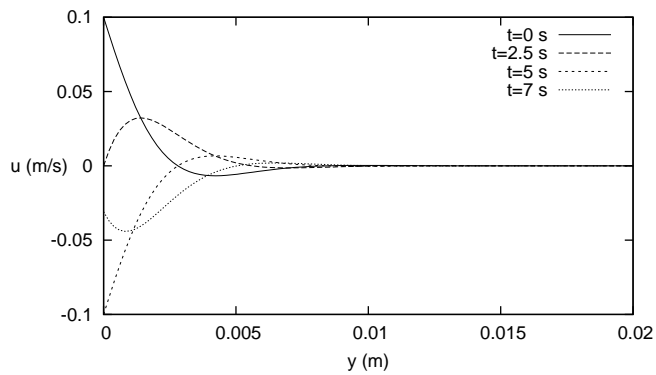


Figura 6.9: Profili della velocità per diversi istanti durante il ciclo di oscillazione. Il fluido è acqua, $U = 0.1$ m/s e $T = 10$ s.

LA VORTICITÀ E LA SUA DINAMICA

Dove si studia come si muovono i vortici e la loro influenza sul campo di moto



Immagine ottenuta da U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration

Dopo aver formulato il problema che consente di calcolare il campo di velocità e quello di pressione in un fluido in moto, è opportuno ricordare quanto visto nella sezione 5.4.1, cioè che l'equazione del moto dei fluidi a densità costante e in cui il rotore della velocità si annulla, si riduce all'equazione di Eulero. Il campo di moto in può essere studiato utilizzando tecniche che verranno illustrate nei capitoli seguenti e che richiedono la conoscenza della vorticità e della sua dinamica.

7.1 Vorticità e circolazione

La **vorticità** ω è un vettore definito in ogni punto del campo di moto e a ogni istante come rotore del vettore velocità. Dunque

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} \quad (7.1a)$$

o equivalentemente:

$$\omega_i = \delta_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad (7.1b)$$

Il suo significato fisico è legato a quello del tensore velocità di rotazione Ω esaminato nel cap. 1. Si ha infatti:

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \delta_{ijk} \omega_k \quad (7.2)$$

Ricordando poi il significato fisico degli elementi del tensore Ω , mostrato nel cap.1, emerge come $\frac{1}{2}\omega_k$ possa essere interpretato come la media delle velocità di rotazione propria delle proiezioni sul piano (x_i, x_j) degli elementi lineari della stella di centro P . Si osservi inoltre che il momento della quantità di moto di un elemento sferico di fluido di volume V rispetto al baricentro G si scrive:

$$\mathbf{Q} = \int_V \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dV \quad (7.3)$$

con \mathbf{r} vettore che descrive la distanza radiale del generico punto della sfera dal baricentro G . Segue

$$Q_i = \delta_{ijk} \int_V \rho \left(v_k|_G + \frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} \Big|_G r_\ell \right) r_j dV \quad (7.4)$$

Essendo $v_k|_G$ una costante, il primo termine non dà contributo a \mathbf{Q} (ad ogni r_j corrisponde un $-r_j$) donde

$$Q_i = \delta_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} \Big|_G \int_V \rho r_j r_\ell dV = \delta_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} \Big|_G \frac{1}{2} I \delta_{j\ell} \quad (7.5)$$

essendo nulli i momenti d'inerzia centrifughi ($j \neq \ell$) ed essendo I il momento d'inerzia rispetto ad un'asse parallelo alla direzione i . La (7.5) si ottiene osservando che $\int_V \rho r_j r_\ell dV = (1/2)\delta_{j\ell}I$. Infatti il momento di inerzia rispetto all'asse x_i è:

$$I = \int_V \rho (r_j^2 + r_k^2) dV$$

che, per la simmetria del problema è pari a:

$$I = 2\rho \int_V r_j^2 dV.$$

Utilizzando la (7.1b) la (7.5) conduce a:

$$Q_i = \frac{1}{2}I\omega_i \quad (7.6)$$

Dunque $\frac{1}{2}\omega$ è la velocità angolare di rotazione che avrebbe un elemento sferico rigido caratterizzato dal valore del momento della quantità di moto dell'effettivo elemento sferico di fluido. Naturalmente tale interpretazione vale solo se V è un elemento sferico infinitesimo.

La vorticità soddisfa un'equazione del tutto analoga a quella soddisfatta dal campo di velocità in un moto incompressibile. Infatti

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \delta_{i\ell k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_\ell} \equiv 0 \quad (7.7)$$

Una linea immersa nel fluido e dotata di tangente ovunque parallela al vettore vorticità locale dicesi **linea di vorticità**. L'insieme di linee che si appoggiano a una curva chiusa riducibile C (tale cioè da costituire la frontiera di almeno una superficie S interamente contenuta nella regione occupata dal fluido) dicesi **tubo vorticoso** (figura 7.1). Poiché il campo della vorticità è solenoidale, cioè tale che la sua divergenza si annulla, è facile mostrare che il flusso della vorticità, detto '**intensità del tubo vorticoso**', risulta indipendente dalla scelta della superficie S utilizzata per misurarlo. La conseguenza di questo fatto è che un tubo vorticoso non può terminare all'interno di un fluido. Considerando una linea di vorticità come un tubo vorticoso la cui sezione tende a zero, la stessa proprietà deve essere verificata dalle linee di vorticità.

Utilizzando il teorema del rotore applicato ad una qualsiasi linea chiusa C che giace sul tubo vorticoso, segue (figura 7.1)

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \Gamma \quad (7.8)$$

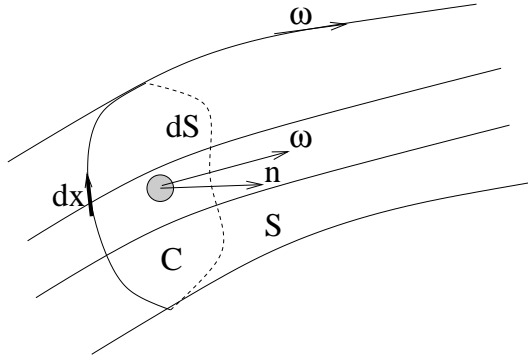


Figura 7.1

dove (dS) è un elemento di superficie aperta di cui C è frontiera.

L'integrale a secondo membro della (7.8) è detto “**circolazione**”. Dunque la circolazione lungo una qualsiasi curva chiusa riducibile che si appoggia sul tubo vorticoso eguaglia il flusso di vorticità attraverso una qualsiasi superficie aperta da essa delimitata, cioè l'intensità del tubo vorticoso formato da tutte le linee di vorticità che alla curva C si appoggiano.

7.2 L'equazione della circolazione e il teorema di Kelvin

La relazione (7.8) definisce la circolazione Γ che, oltre a essere legata al flusso di vorticità sulla sezione di un tubo vorticoso, vedremo essere legata alla forza che un fluido esercita su un corpo in movimento. È interessante quindi determinare come varia nel tempo la circolazione associata a una curva materiale C . Dalla definizione stessa di circolazione segue che

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_C v_j dx_j = \int_C \frac{dv_k}{dt} dx_k + \int_C v_k \frac{d(dx_k)}{dt} \quad (7.9)$$

Utilizzando l'equazione di Navier-Stokes sotto l'ipotesi di fluido 'incomprimibile' e il campo di forze conservativo ($f_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$) e utilizzando la (1.28a), segue

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_C \left(f_k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j} \right) dx_k + \int_C v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} dx_j \quad (7.10)$$

Essendo gli indici j e k entrambi sommanti, è possibile scambiarli e scrivere

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_C \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{v_j v_j}{2} \right) \right] dx_k \quad (7.11)$$

Il primo, il secondo e il quarto termine costituiscono l'espressione di un differenziale esatto che integrato lungo una linea chiusa porge un valore nullo:

$$\int_C \nabla \left(\varphi - \frac{p}{\rho} + \frac{|v|^2}{2} \right) \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Si ottiene dunque l'equazione della circolazione:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \nu \int_C \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j} dx_k = \nu \int_C \nabla^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad (7.12)$$

Se si aggiunge l'ipotesi di fluido ideale ($\nu = 0$), si ottiene il teorema di Kelvin: *La circolazione attorno ad una curva materiale chiusa si conserva (rimane costante) nel tempo in un fluido ideale, incomprimibile e soggetto ad un campo di forze conservativo.*

Si noti che ove sia violata qualcuna delle ipotesi del teorema di Kelvin, si può generare circolazione e dunque vorticità all'interno di un fluido.

7.3 Equazione della vorticità nei moti incomprimibili

Nel caso di moti di fluidi a proprietà costanti, l'equazione di Navier-Stokes si scrive

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{f} + \nabla p - \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (7.13)$$

Per ricavare l'equazione della vorticità è necessario operare il rotore della (7.13).

Posto il campo di forze \mathbf{f} conservativo ($\mathbf{f} = \nabla \varphi$) e osservando che $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$, segue che nell'equazione finale non comparirà un termine legato alle forze di massa. Per lo stesso motivo risulterà assente il termine legato alla pressione. Utilizzando infine la relazione

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{v}) - ((\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Si ottiene, dopo aver operato il rotore della (7.13)

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - \rho (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (7.15)$$

che può essere scritta in modo equivalente come:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (7.16)$$

Uno dei vantaggi legati alla descrizione del moto in termini di vorticità è l'assenza nella (7.16) dei termini di pressione e delle forze di massa. Sulla base di quanto esposto nel paragrafo 7.1, la (7.16) descrive la variazione della velocità di rotazione di un elemento fluido istantaneamente sferico. Il secondo termine a secondo membro della (7.16) eguaglia il momento esercitato dalle tensioni viscosse mentre il primo termine esprime la variazione del momento della quantità di moto associata a variazioni di forma dell'elemento materiale considerato. Infatti utilizzando la (1.22b) è possibile scrivere

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{D} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (7.17)$$

È facile verificare, utilizzando la (7.2), che $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ è nullo. Appare dunque evidente, ricordando il significato fisico degli elementi di \mathbf{D} , esposto in precedenza, che $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ è legato alle deformazioni che hanno luogo all'interno del fluido. In particolare, se il fluido si muove come un corpo rigido $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ risulta identicamente nullo. Inoltre è possibile osservare che $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ si annulla se il moto è bidimensionale.

In termini di dinamica della vorticità la (7.16) si interpreta osservando che:

- il termine $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}$ rappresenta convezione di vorticità da parte del fluido per effetto di disuniforme distribuzione della vorticità stessa;
- il termine $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ rappresenta la variazione di $\boldsymbol{\omega}$ associata al processo di diffusione molecolare (viscosa);
- il termine $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, che non ha un corrispondente nelle equazioni di Navier-Stokes, è quello che attribuisce alla dinamica della vorticità caratteristiche peculiari.

Per comprendere il ruolo di tale termine è necessario notare che esso è in grado di produrre una variazione della vorticità, che ricordiamo è legata alla velocità di rotazione degli elementi fluidi, anche in assenza di momenti indotti di forze esterne. La variazione della vorticità è causata da una deformazione degli elementi fluidi (indotta dalla presenza di un gradiente di velocità non nullo) che produce una variazione del loro momento di inerzia. Quindi, anche se non sono presenti momenti dovuti a forze esterne agenti sul fluido, la variazione del momento di inerzia degli elementi fluidi può produrre una variazione della loro velocità di rotazione (vorticità). Chiaramente, tale meccanismo è operante se e solo se gli elementi fluidi sono già in rotazione, cioè quando la vorticità è inizialmente non nulla. Per comprendere appieno tale meccanismo, è sufficiente considerare che una pattinatrice su ghiaccio è in grado di far variare la sua velocità di rotazione, quando è sulla punta di un pattino, semplicemente allontanando o avvicinando

le braccia al corpo, anche in assenza di momenti esercitati da forze esterne (la forza di gravità non induce alcun momento sul corpo della pattinatrice perché passante per l'asse di rotazione né tantomeno è in grado di generare un momento il ghiaccio su cui la pattinatrice si appoggia con la punta di un pattino).



Figura 7.2: Foto da <http://laymaeee.tumblr.com/post/137620062251/graphic-matches-from-performances>

7.4 La generazione di vorticità nei fluidi a densità costante

Si consideri un fluido in condizioni di quiete, evidentemente la vorticità è nulla in tutti i suoi punti. Si supponga ora che il fluido sia messo in moto. In generale il moto risultante sarà caratterizzato da valori della vorticità non nulli, almeno in parte della massa fluida. Risulta quindi che, mettendo in moto il fluido, è stata generata vorticità. Nel seguito viene illustrato il processo che consente la generazione di vorticità in un fluido a densità costante soggetto a un campo di forze conservativo.

Consideriamo quindi la (7.16), moltiplichiamo entrambi i membri per ω_i e sommiamo le equazioni ottenute considerando i tre possibili valori dell'indice i .

Si ottiene

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \omega_i \omega_i \right) + \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \omega_i \omega_i \right) - \rho \omega_i \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \mu \omega_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} = 0 \quad (7.18)$$

L'ultimo termine a destra della (7.18) può essere anche espresso nella seguente forma

$$\mu \left[\frac{\partial}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{1}{2} \omega_i \omega_i \right) - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right] \quad (7.19)$$

Definendo ω come il modulo del vettore $\boldsymbol{\omega}$ e integrando su un volume fisso dello spazio, segue

$$\begin{aligned} \rho \int_{V_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) dV_0 &= \int_{V_0} \rho \omega_i \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV_0 + \\ \mu \int_{V_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right] dV_0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Applicando quindi il teorema del trasporto ($\rho=\text{costante}$), e dopo aver diviso per ρ la relazione risultante, si ottiene che la derivata materiale del quadrato del modulo della vorticità integrato su un volume di fluido mobile è eguagliata dalla somma di tre termini di facile interpretazione fisica.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_0} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) dV_0 &= \int_{V_0} \omega_i \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV_0 + \\ \nu \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) dV_0 &- \nu \int_{V_0} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dV_0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

Il terzo termine, di forma quadratica, fornisce sempre un contributo negativo e rappresenta le dissipazioni di vorticità per effetto viscoso. Il secondo termine $\frac{\nu}{2} \int_{V_0} \nabla^2 \omega^2 dV_0 = \frac{\nu}{2} \int_{V_0} \nabla \cdot (\nabla \omega^2) dV_0 = \frac{\nu}{2} \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot \nabla \omega^2 dS_0$ produce una variazione del contenuto di vorticità per effetto di un flusso del gradiente del modulo della vorticità attraverso la superficie S che delimita V . Conseguentemente il secondo termine né produce né dissipa vorticità all'interno del volume V . Il primo termine può far variare il contenuto di vorticità attraverso la deformazione di elementi materiali. È opportuno però osservare che tale termine può far aumentare o diminuire il contenuto di vorticità solo se essa è già presente all'interno di V , altrimenti il suo contributo è nullo. È possibile concludere che *la vorticità non può essere generata all'interno del volume V se si considera un fluido incomprimibile soggetto ad un campo di forze di massa conservativo.*

Qual'è dunque l'origine della vorticità in moti che partono dallo stato di quiete in fluidi incompressibili soggetti a campi di forza conservativi? È una ovvia constatazione fisica infatti che vorticità è presente almeno su porzioni del campo di moto nei moti reali: è dunque lecito attendersi che esista qualche meccanismo che dà luogo alla generazione di vorticità in corrispondenza della frontiera del fluido.

Quando il fluido risulta delimitato totalmente o in parte da pareti solide mentre il resto della frontiera è l'infinito dove il fluido si trova in uno stato di quiete, tale meccanismo è costituito dalla *condizione di aderenza alla parete* (meccanismi analoghi sussistono nel caso di frontiere *libere*). Considerando il campo di moto generato dal moto impulsivo di una piastra piana (strato di Rayleigh) descritto nel paragrafo 6.2, è facile, dopo avere calcolato la vorticità, concludere che la vorticità viene generata sulla superficie della piastra e diffonde in direzione normale alla stessa per effetto della viscosità.

Per comprendere il ruolo della condizione di aderenza alla parete si farà riferimento al caso di un fluido che, in quiete inizialmente, viene messo in moto da un corpo solido la cui velocità raggiunge impulsivamente un valore finito all'istante $t = 0$. Lo sviluppo del moto si può ritenere avvenga in tre stadi.

- i) All'istante iniziale il fluido viene messo in moto istantaneamente (se si trascurano gli effetti di comprimibilità) e non può che muoversi di moto irrotazionale. Se, come avviene di regola, la velocità tangenziale alla parete corrispondente a tale moto non risulta nulla, è presente, in corrispondenza della parete, uno strato vorticoso di spessore teoricamente nullo e vorticità teoricamente infinita in cui la velocità passa dal valore nullo imposto dall'aderenza al valore finito imposto dal moto irrotazionale iniziale.
- ii) In una seconda fase la vorticità, concentrata alla parete per $t = 0$, diffonde nel fluido per effetto dell'azione della viscosità. Se quest'ultima fosse l'unica causa delle variazioni della vorticità in ogni punto del campo di moto ciascuna componente di ω soddisferebbe all'equazione del calore e l'ordine di grandezza della distanza fino alla quale la vorticità ha sensibilmente diffuso all'istante t risulterebbe $\sqrt{\nu t}$. La vorticità è però anche trasportata dagli elementi materiali e modificata per effetto di deformazioni degli elementi materiali stessi. L'effetto del trasporto di vorticità può sensibilmente modificarne la distribuzione. Tuttavia per tempi piccoli la velocità relativa del fluido rispetto alla parete non può che avere, nelle immediate vicinanze della parete, una componente normale molto piccola. In altre parole quando la distanza di diffusione $\sqrt{\nu t}$ è piccola, la vorticità è essenzialmente trasportata per effetto convettivo tangenzialmente alla parete e risulta non nulla solo entro uno strato di spessore $\sqrt{\nu t}$ circostante il corpo.

Qui la vorticità assume valori ora finiti essendo stato *diffuso* il salto finito di velocità ora distribuito in uno strato di spessore non nullo.

iii) Per tempi più grandi possono realizzarsi due diverse tipologie di comportamento della vorticità nei moti ad alti numeri di Reynolds.

- Se il corpo è sufficientemente sottile e orientato in modo da formare angoli piccoli con la direzione del moto relativo del fluido che lo investe, si osserva che la componente normale della velocità relativa del fluido in prossimità della parete si mantiene molto piccola. In tal caso risulta modesto il trasporto convettivo di vorticità normale alla parete e si raggiunge nel tempo una condizione di moto stazionaria in cui diffusione viscosa e convezione longitudinale di vorticità si fanno equilibrio. Se L ed U sono rispettivamente una dimensione longitudinale caratteristica del corpo e la velocità del moto uniforme che lo investe, il tempo caratteristico di percorrenza della regione adiacente il corpo da parte delle particelle fluide è L/U sicché lo spessore caratteristico δ dello strato (detto strato limite) in cui la vorticità resta confinata è $\sqrt{\nu L/U}$. Segue:

$$\frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\sqrt{UL/\nu}} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

cioè δ è molto piccolo rispetto a L per valori elevati del numero di Reynolds Re . È questo il caso in cui lo strato limite *non si separa*.

- Se il corpo è tozzo o, pur essendo sottile, è orientato in modo obliquo rispetto al fluido che lo investe, si osserva la presenza di significativi effetti convettivi in direzione ortogonale al corpo che estendono considerevolmente la regione in cui è presente vorticità. È questo il caso in cui lo strato limite *si separa*.

Lo studio dei moti ideali irrotazionali è di diretto rilievo nel primo caso. Quando lo spessore dello strato limite è molto piccolo è lecito infatti in prima approssimazione ignorare la presenza e trattare il campo di moto esterno ad esso, appunto come ideale e irrotazionale. Tale studio fornisce le premesse per la successiva analisi del campo di moto nello strato limite in cui non si potrà invece ignorare il ruolo degli effetti viscosi.

7.5 Sul meccanismo di generazione dei tornado

Quando un elemento fluido allineato con il vettore vorticità è allungato per effetto del campo di moto locale, per il principio del momento della quantità di moto è osservabile un aumento dell'intensità della vorticità.

È possibile trovare diversi esempi di campo di moto in cui è osservabile un aumento dell'intensità della vorticità generato da questo effetto fino a che la stessa vorticità diviene così intensa che la sua dissipazione indotta dagli effetti viscosi bilancia il suo aumento dovuto all'allungamento degli elementi fluidi.

Consideriamo in dettaglio il seguente semplice esempio che può essere considerato come una schematizzazione del meccanismo che conduce alla generazione di tornado e trombe d'aria (figura 7.3) che annualmente causano notevoli danni (si veda la figura 7.4). In questo esempio la vorticità è unidirezionale e supposta



Figura 7.3: Tornado di categoria F5 mentre si avvicina a Elie (Manitoba) il 22 giugno 2007. Foto di Justin Hobson.

allineata con l'asse x di un sistema di riferimento cilindrico (x, r, θ) :

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial x}, \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = (\omega, 0, 0), \quad (7.22)$$

Il campo di moto è supposto assial-simmetrico e le componenti del vettore velocità vengono denotate con (v_x, v_r, v_θ) . L'annullarsi di $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}$ ($\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\omega_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\omega_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial\omega_x}{\partial x}$), implica che $\frac{\partial\omega_x}{\partial x} = 0$, dunque ω deve essere una funzione solo di r e del tempo t .



Figura 7.4: Danni provocati a College Park (Prince Georges County) dal tornado del 24 Settembre 2001.

(<http://www.astro.umd.edu/white/images/tornado/tornado4.jpeg>)

Affinché il campo di vorticità rimanga unidirezionale è necessario, sulla base dell'equazione della vorticità, che $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v}$ sia un vettore parallelo all'asse x e quindi essendo:

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v})_x = \omega_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + \omega_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v})_r = \omega_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \omega_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \omega_x \frac{\partial v_r}{\partial x} = 0$$

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v})_\theta = \omega_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \omega_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \omega_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} = 0$$

ne segue che v_r e v_θ devono essere indipendenti da x .

Inoltre la (7.22) mostra che v_x può dipendere solo da x mentre dall'equazione di continuità:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

a causa della simmetria assiale del moto, discende:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

ricordando che $v_r(r)$ e $v_x(x)$, si ottiene:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \text{costante},$$

da cui discende che il moto nel piano (x, r) deve assumere la forma:

$$v_x = \alpha x, \quad v_r = -\frac{1}{2}\alpha r. \quad (7.23)$$

(dove α è una costante positiva). Tale campo di moto rappresenta dunque un moto assial-simmetrico, incomprimibile e irrotazionale nell'intorno di un punto di ristagno al quale è possibile poi sovrapporre un campo di velocità $v_\theta(r)$ azimutale a cui è associata la vorticità ω distribuita radialmente in modo arbitrario.

L'evoluzione temporale della distribuzione della vorticità è controllata dall'equazione della vorticità in coordinate cilindriche:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega \frac{\partial v_x}{\partial x} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right]$$

che, nel caso in esame si riduce a:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} = \omega \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$$

da cui, utilizzando le (7.23), si ottiene:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\alpha}{2r} \frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \quad (7.24)$$

Considerato che la distribuzione iniziale di ω è arbitraria, non è possibile fornire la soluzione della (7.24) in forma chiusa ma è necessario integrarla, ad esempio, numericamente.

Tuttavia è possibile determinare la distribuzione finale stazionaria della vorticità, a cui quella iniziale tende, risolvendo

$$\frac{\alpha}{2r} \frac{d(\omega r^2)}{dr} + \nu \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) = 0 \quad (7.25)$$

che può essere scritta nella forma

$$\frac{\alpha}{2r} \frac{d(\omega r^2)}{dr} + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) = 0 \quad (7.26)$$

e quindi

$$\frac{\alpha}{2} \frac{d(\omega r^2)}{dr} + \nu \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) = 0 \quad (7.27)$$

Si ottiene

$$\frac{\alpha}{2} \omega r^2 + \nu r \frac{d\omega}{dr} = C \quad (7.28)$$

con C costante che deve essere posta pari a zero per evitare una singolarità per $r = 0$. La (7.28), con $C = 0$, può essere facilmente integrata fornendo

$$\omega_f(r) = \omega_1 \exp \left(-\frac{\alpha r^2}{4\nu} \right). \quad (7.29)$$

L'integrazione della (7.24), mostra che la (7.29) è la distribuzione della vorticità a cui tende la ω al tendere di t a infinito, ipotizzando solo che la distribuzione iniziale di ω_i tenda a 0 più velocemente di r^{-2} e che $\int_0^\infty \omega_i 2\pi r dr$ sia finito e diverso da zero. La soluzione (7.29) rappresenta un campo di moto stazionario in cui la vorticità è concentrata in una regione attorno all'origine di raggio di ordine $\sqrt{\nu/\alpha}$. L'intensificarsi della vorticità è dovuto all'allungamento degli elementi fluidi che è bilanciato dagli effetti diffusivi.

L'aspetto interessante dell'evoluzione del fenomeno è quello che porta la vorticità alla (7.29) indipendentemente dalla sua distribuzione iniziale. Quindi c'è la tendenza della vorticità a concentrarsi attorno ad un punto dove essa assume valori elevati producendo una forte rotazione del fluido. In figura 7.5 è riportata la distri-

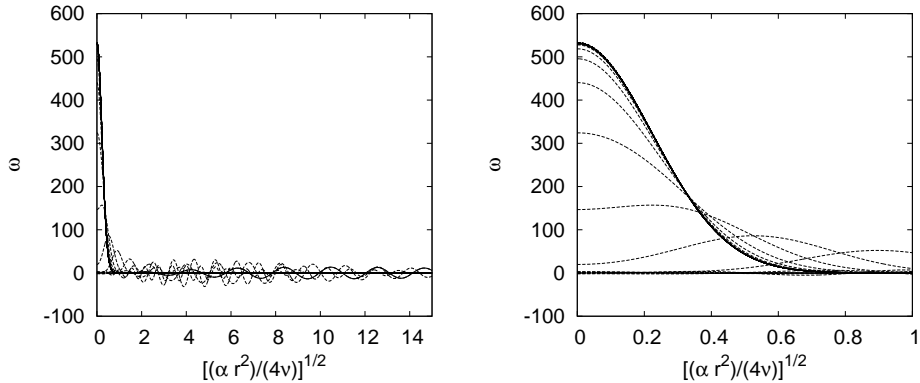


Figura 7.5: Distribuzione radiale della vorticità al tempo $t = 0$ (linea continua sottile), a diversi istanti temporali successivi (linee tratteggiate) e per t tendente a infinito (linea continua spessa).

buzione radiale della vorticità al tempo $t = 0$ (linea continua sottile) che oscilla attorno allo zero assumendo valori modesti, a diversi istanti temporali successivi

(linee tratteggiate) e per t tendente a infinito (linea continua spessa). L'evoluzione temporale di ω è stata ottenuta integrando numericamente la (7.24) utilizzando un approccio alle differenze finite del secondo ordine per discretizzare le derivate spaziali e un approccio di Runge-Kutta sempre del secondo ordine per integrare nel tempo la (7.24). Analizzando i risultati mostrati nella figura 7.5, è possibile osservare come in corrispondenza dell'origine il valore di ω per t tendente a infinito sia maggiore di 500 e che essa sia significativa solo per $[(\alpha r^2)/(4\nu)]^{1/2}$ inferiore a 1 mentre inizialmente il valore di ω non supera 14 ed è significativo fino a valori di $[(\alpha r^2)/(4\nu)]^{1/2}$ pari a circa 30.

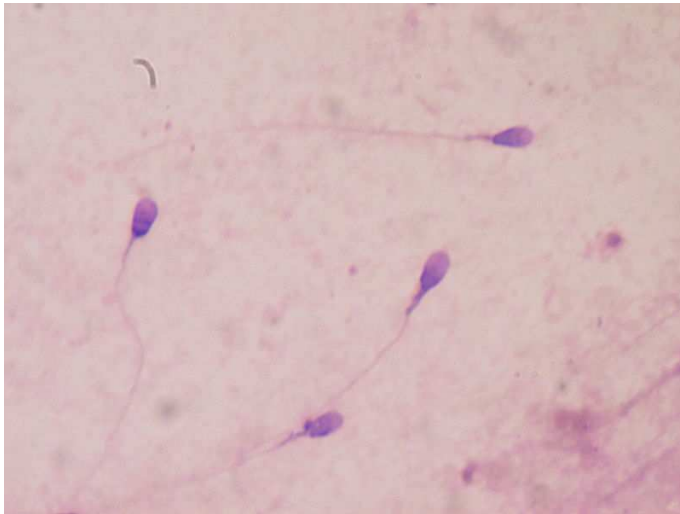
Il meccanismo illustrato è chiaramente analogo a quello che genera il vortice che appare in corrispondenza dello scarico di un lavandino durante il suo svuotamento (figura 7.6)



Figura 7.6: Vortice in corrispondenza di un tubo di scarico.
(foto da 'askamathematician.com')

MOTI A BASSI NUMERI DI REYNOLDS

Dove si descrive il moto di un fluido a bassi numeri di Reynolds, come quello generato dal movimento di uno spermatozoo



Spermatozoo fotografati in un laboratorio clinico. Foto di Bobjgalindo (da Wikicommon)

8.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti sono state esaminate alcune soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes dette, nella letteratura, *esatte* poiché la loro deduzione non richiede alcuna approssimazione.

È da notare tuttavia che tali moti si riferiscono a configurazioni particolari in cui i termini inerziali si annullano identicamente o risultano esattamente quantificabili. Nella generalità dei casi, però, non sono disponibili tecniche analitiche di soluzione delle equazioni di Navier-Stokes se non facendo ricorso a opportune approssimazioni.

Tali approssimazioni sono introdotte sulla base del valore assunto dal rapporto fra l'ordine di grandezza del termine convettivo e quello del termine viscoso. Definito U l'ordine di grandezza della velocità e introdotta la lunghezza scala L caratterizzante la geometria del problema, è possibile valutare l'ordine di grandezza del rapporto fra il termine convettivo e il termine viscoso, chiaramente adimensionale, che risulta pari a

$$\frac{\rho U^2 / L^2}{\mu U / L^2} = \frac{UL}{\nu} = Re$$

Tale numero adimensionale, indicato con Re , è noto come numero di Reynolds e chiaramente il termine viscoso prevale su quello convettivo quando $Re \ll 1$ e viceversa.

È oggetto del capitolo presente lo studio di moti caratterizzati da valori sufficientemente piccoli del numero di Reynolds.

Il numero di Reynolds può risultare piccolo poiché tale risulta la velocità o la lunghezza caratteristica del moto o quando sia grande la viscosità cinematica del fluido. Dunque i moti per cui tale schema risulta rilevante comprendono i moti molto lenti (*creeping flows*) e i moti generati da corpi di piccole dimensioni in movimento in fluidi altrimenti fermi. Ne sono esempi i moti generati da particelle Browniane, di microorganismi, di piccole gocce, di particelle solide nei processi di filtrazione, di particelle cariche elettricamente nei colloidi.

La teoria dei moti a bassi Re si è sviluppata durante la seconda metà del XIX secolo a partire dalla nota memoria di G. Stokes (1851) sull'effetto della viscosità sul moto del pendolo. L'obiettivo di Stokes era la determinazione del moto prodotto da piccole oscillazioni rettilinee di un cilindro o di una sfera in un fluido in quiete e la determinazione dell'azione esercitata sulla sfera. Successivamente egli fornì la soluzione relativa al moto dovuto a una corrente uniforme che investe una sfera ottenendo la nota legge di resistenza. I risultati di tali studi sono stati utilizzati in numerosi campi di interesse applicativo. Una sfera che si muove uniformemente in un fluido in quiete è utilizzata come viscosimetro: la legge di

resistenza di Stokes istituisce, infatti, un legame (lineare) fra velocità di caduta e viscosità del fluido.

Il caso del moto intorno a un cilindro circolare, anch'esso affrontato da Stokes, si rivela particolarmente illuminante: non esiste, infatti, nello schema di Stokes, soluzione alcuna che tenda alla velocità uniforme al tendere a infinito della distanza dall'asse del cilindro. Tale risultato, noto come *paradosso di Stokes*, ha ricevuto interpretazione nell'ambito di uno schema razionale solo dopo il 1910, quando Oseen propose le sue equazioni valide a distanza dal corpo in movimento.

8.2 Equazioni di Stokes

Consideriamo un moto incompressibile a bassi numeri di Reynolds nel campo della gravità. Poniamo che il moto sia tale che i termini (inerziali) quadratici nella velocità risultino trascurabili in ciascun punto del campo di moto e a ciascun istante rispetto ai termini lineari. Ci riserviamo di precisare nel seguito, in modo formale, le condizioni che devono risultare soddisfatte.

Le equazioni che pongono il problema sono

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j} \quad (8.2)$$

dove gli effetti legati alla presenza del campo di forze gravitazionale non sono considerati, assumendo che la pressione sia la cosiddetta pressione modificata cioè la pressione diminuita del contributo idrostatico. Il problema può poi essere riscritto in termini della vorticità

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x_j \partial x_j} \quad (8.3)$$

o in termini della sola pressione

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j} = 0 \quad (8.4)$$

Determinata la vorticità, il campo di moto segue dal legame fra la velocità e la vorticità mentre, noto il campo della pressione, la velocità segue dall'equazione (8.2).

8.3 Moti stazionari intorno a corpi immersi a bassi Re

Scelto un sistema di coordinate rispetto al quale il corpo si trova in condizioni di quiete, il problema è dunque posto dal seguente sistema differenziale

$$\nabla^2 \omega = 0 \quad (8.5)$$

$$\nabla^2 p = 0 \quad (8.6)$$

con le condizioni al contorno

$$\mathbf{v} \rightarrow U \quad (x \rightarrow \infty) \quad (8.7)$$

$$p \rightarrow p_0 \quad (x \rightarrow \infty) \quad (8.8)$$

con U velocità e p_0 pressione uniformemente distribuite a grande distanza dal corpo in moto. Alle (8.5), (8.6) vanno poi associate opportune condizioni al contorno in corrispondenza della frontiera S del corpo.

Si dimostra che il problema così posto (con opportune condizioni di regolarità su S) ammette un'unica soluzione.

8.3.1 Il caso della sfera rigida

Questo caso risulta di particolare interesse e, come già notato, venne risolto da Stokes (1851).

È qui opportuno fare riferimento a coordinate sferiche (r, ϑ, φ) con origine nel centro della sfera assunta di raggio pari a a .

Data la simmetria del moto rispetto all'asse della sfera parallelo a U , l'equazione di continuità implica l'esistenza di una funzione $\psi(r, \vartheta)$ tale che

$$v_\varphi = 0 \quad (8.9a)$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \quad (8.9b)$$

$$v_\vartheta = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (8.9c)$$

Essendo poi il moto indipendente dalla coordinata φ e risultando nulla la v_φ , l'espressione di ω in coordinate sferiche implica l'esistenza di una sola componente, la ω_φ , esprimibile in funzione della funzione di corrente ψ attraverso le relazioni

$$\begin{aligned} \omega_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right) = \\ &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right] \psi \end{aligned} \quad (8.10)$$

Inoltre la (8.3) scritta in coordinate sferiche e proiettata nella direzione φ fornisce, data l'indipendenza del moto da φ ,

$$\nabla^2 \omega_\varphi = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right] \omega_\varphi = 0 \quad (8.11)$$

Le condizioni al contorno per la funzione di corrente ψ impongono poi

$$\psi = \frac{U \sin^2 \vartheta}{2} r^2 + c \quad \text{per} \quad r \rightarrow \infty \quad (8.12)$$

con c costante arbitraria mentre in corrispondenza della parete della sfera è necessario imporre la condizione di aderenza

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{per} \quad r = a \quad (8.13)$$

Posto $c = 0$ nella (8.12) (il che è lecito data la arbitrarietà della costante) la (8.12) suggerisce la possibilità di effettuare la separazione delle variabili ponendo

$$\psi = U \sin^2 \vartheta f(r) \quad (8.14)$$

dove $f(r)$ è una funzione da determinarsi in modo da soddisfare l'equazione (8.11) e le condizioni al contorno (8.11)-(8.13).

Sostituendo la (8.14) nella (8.11) si ottiene

$$[\mathcal{L}_1][\mathcal{L}_2]f \equiv \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2}{r^2} \right] \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) \right] f = 0 \quad (8.15)$$

Non è difficile verificare che le funzioni r^2 ed r^{-1} soddisfano alla $\mathcal{L}_2 f = 0$ e quindi alla (8.15) che è soddisfatta anche dalle funzioni r e r^4 . Ne segue che quattro soluzioni indipendenti della (8.15) sono (r^2, r^{-1}, r, r^4) e dunque

$$f = c_1 r^4 + c_2 r^2 + c_3 r + c_4 / r \quad (8.16)$$

Imponendo la (8.12), la dipendenza della f da r^4 si rivela impossibile. Dunque

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad (8.17)$$

Le (8.13) richiedono infine che

$$c_3 = -\frac{3}{4}a, \quad c_4 = \frac{a^3}{4} \quad (8.18)$$

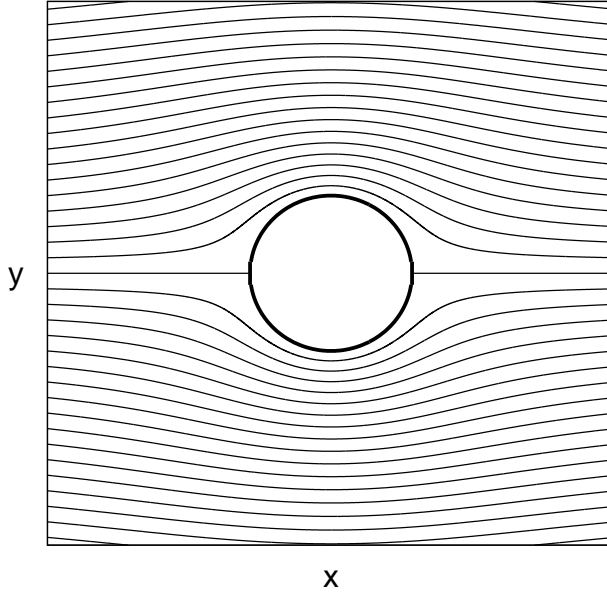


Figura 8.1: Linee di corrente, su un piano assiale, del moto dovuto a una sfera in moto per $Re \ll 1$.

La soluzione per la funzione di corrente è quindi

$$\psi = U r^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{a}{r} + \frac{a^3}{4r^3} \right] \sin^2 \vartheta \quad (8.19)$$

L'andamento delle linee di corrente è riportato in figura 8.1. Esse risultano simmetriche rispetto ad un piano ortogonale a \mathbf{U} come consegue dalla linearità della relazione fra \mathbf{v} ed \mathbf{U} . Conseguentemente, invertendo la direzione di \mathbf{U} segue l'inversione del verso di \mathbf{v} in ogni punto.

Le relazioni fra le componenti della velocità e la funzione di corrente porgono

$$v_r = 2U \cos \vartheta \frac{f}{r^2} = U \cos \vartheta \left[1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{a^3}{2r^3} \right] \quad (8.20)$$

$$v_\vartheta = -U \sin \vartheta \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = -U \sin \vartheta \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{a^3}{4r^3} \right] \quad (8.21)$$

Osservando, poi, che

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}}{r} = U \cos \vartheta, \quad \frac{\mathbf{x}}{r} \equiv \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \quad (8.22)$$

le (8.20), (8.21) possono riscrivarsi in forma vettoriale

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} \left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) + \mathbf{x} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}}{r^2} \left(\frac{2f}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) \quad (8.23)$$

Le (8.20), (8.21) rivelano che la perturbazione indotta sul moto del fluido dalla presenza della sfera si estende fino a una distanza considerevole da essa (il vettore $(\mathbf{v} - \mathbf{U})$ tende a 0 come r^{-1} per r grandi). Dunque la presenza di pareti rigide (per es. un condotto a generatrici parallele a \mathbf{U}) può modificare sensibilmente il moto del fluido, anche se le pareti sono situate a notevole distanza (parecchi diametri) dalla sfera. Così l'interazione fra sfere in moto può essere rilevante anche se queste sono situate a grandi distanze.

Tale risultato è fisicamente comprensibile se si osserva che il moto è il risultato di un puro processo di diffusione (viscosa) della vorticità che ha origine in corrispondenza della sfera. L'effetto di convezione della vorticità è stato assunto trascurabile data la piccolezza di Re . La situazione è analoga a quella che si avrebbe se la sfera fosse in quiete e agisse come sorgente di vorticità. Non è difficile mostrare (si sostituisca la (8.19) nella (8.10)) che

$$\omega_\varphi = -\frac{3}{2} \frac{aU \sin \vartheta}{r^2} \quad (8.24)$$

Dunque $|\omega|$ decresce come r^{-2} al crescere di r .

Determiniamo infine l'azione esercitata dal fluido sulla sfera. È sufficiente valutare il tensore delle tensioni in $r = a$. Consideriamo la i -esima componente del vettore tensione in $\mathbf{x} = a\mathbf{n}$ con \mathbf{n} versore normale alla superficie sferica nel punto generico

$$t_i = n_j (T_{ij})_{r=a} = n_j \left\{ -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\}_{r=a} \quad (8.25)$$

Al fine di esplicitare la (8.25), è necessario conoscere la distribuzione della pressione. Questa è ottenibile dalle relazioni

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\mu \{ \nabla \times \boldsymbol{\omega} \}_r = -\frac{\mu}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\omega_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} \quad (8.26)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = -\mu \{ \nabla \times \boldsymbol{\omega} \}_\vartheta = \frac{\mu}{r} \frac{\partial(r\omega_\varphi)}{\partial r} \quad (8.27)$$

Integrando le (8.26), (8.27) e facendo uso delle condizioni al contorno, si ottiene

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \frac{\mu a U \cos \vartheta}{r^2} \quad (8.28)$$

Si ottiene poi

$$t_i = -pn_i + \mu n_i \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \left(-\frac{f''}{r} + 6\frac{f'}{r^2} - 10\frac{f}{r^3} \right)_{r=a} + \mu U_i \left(\frac{f''}{r} - 2\frac{f'}{r^2} + \frac{2f}{r^3} \right)_{r=a} \quad (8.29)$$

dove $f' \equiv df/dr$ e $f'' \equiv d^2f/dr^2$. Sostituendo nella (8.29) l'espressione di f ottenuta segue infine

$$t_i = -p_0 n_i + \frac{3\mu U_i}{2a} \quad (8.30)$$

La (8.30) suggerisce che la parte della tensione agente sulla sfera dovuta al moto del fluido presenta lo stesso valore $\left(\frac{3\mu U}{2a}\right)$ in ciascun punto della sfera, risultato quest'ultimo sorprendente ma valido solo nel caso di corpo rigido di conformazione sferica. Il contributo alla resistenza totale associato al termine p_0 risulta nullo. Il termine viscoso integrato sulla superficie sferica fornisce invece

$$D = \int_S t_x dS = \frac{3}{2} \mu \frac{U}{a} 4\pi a^2 = 6\pi \mu a U \quad (8.31)$$

La (8.31) è nota come *legge di Stokes*. Essa assume forma particolarmente significativa se si normalizza D commisurandola a un'azione d'inerzia caratteristica del moto. Si definisce

$$c_D = \frac{D}{\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right) \pi a^2} = \frac{12\mu}{aU\rho} = \frac{24}{Re} \quad (8.32)$$

avendo definito con $Re = 2aU/\nu$ il numero di Reynolds caratteristico del moto. Il coefficiente c_D è detto *coefficiente di resistenza* della sfera.

A partire dalla (8.31) è possibile calcolare la velocità di caduta di una particella solida sferica in un fluido viscoso, sotto le ipotesi che essa abbia raggiunto la condizione di moto uniforme e che il numero di Reynolds sia piccolo. Osservando che nella valutazione della distribuzione della pressione sulla superficie della sfera si è tralasciato l'effetto del campo di forze esterno, l'equilibrio dinamico della particella impone

$$\frac{4}{3}\pi a^3 (\rho_s - \rho)g = 6\pi a \mu V \quad (8.33)$$

avendo indicato con ρ_s la densità della particella sferica e con V la velocità di caduta. La (8.33) può essere riscritta nella forma

$$Re = \frac{4}{9} \frac{a^3 g}{\nu^2} \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) \quad (8.34)$$

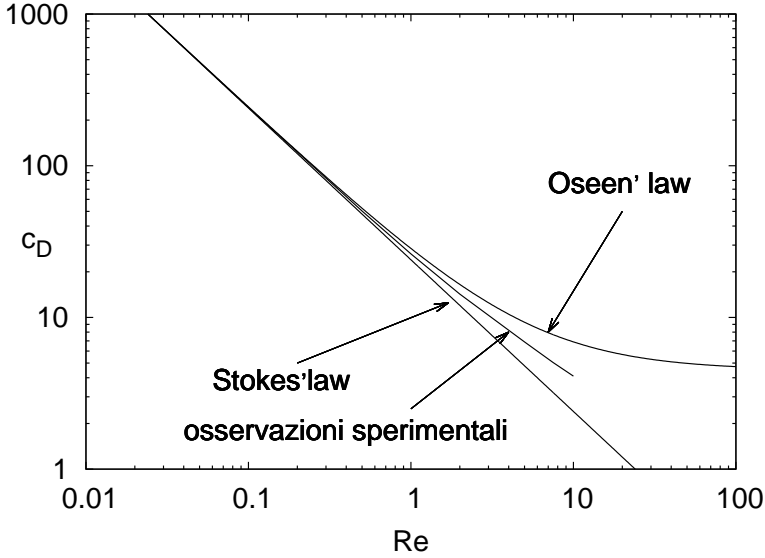


Figura 8.2: Confronto tra il coefficiente di resistenza ottenuto sulla base della legge di Stokes e le osservazioni sperimentali

La legge di Stokes, che è raffigurata nella figura 8.2, si rivela sufficientemente accurata per $Re < 0.5$.

Si rivela, a posteriori, particolarmente importante verificare entro quali condizioni l'ipotesi di trascurabilità dei termini inerziali si trova verificata dalla soluzione ottenuta. Se si scrive il vettore velocità nella forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$$

si ha che il termine viscoso nelle equazioni di Navier-Stokes si scrive $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$, mentre il termine inerziale ha la forma $((\mathbf{U} + \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}$. Utilizzando la soluzione ottenuta, si trova che un generico termine viscoso, ad es. $\mu(\partial^2 v_r / \partial r^2)$, tende a zero come r^{-3} per $r \rightarrow \infty$. Precisamente

$$\mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} = U \cos \vartheta \mu \left(-3 \frac{a}{r^3} + 6 \frac{a^3}{r^5} \right) \quad (8.35)$$

Consideriamo ora un tipico termine inerziale, per es. $\rho(v_r \partial v_r / \partial r)$. Si trova:

$$\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \rho (U \cos \vartheta)^2 \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) \left(\frac{3a}{2r^2} - \frac{3a^3}{2r^4} \right) \quad (8.36)$$

Il confronto fra le (8.35) e (8.36) rivela che gli ordini di grandezza dei termini viscosi e inerziali non hanno ugual rapporto nelle vicinanze della sfera e molto

lontano da essa. Infatti

$$\frac{|\mu \partial^2 v_r / \partial r^2|}{|\rho v_r \partial v_r / \partial r|} \sim \frac{3\mu a U \cos \vartheta / r^3}{3/2 \rho (U \cos \vartheta)^2 a / r^2} = 2 \frac{\mu}{\rho U} \frac{1}{r \cos \vartheta} \quad (\text{per } r \rightarrow \infty) \quad (8.37)$$

o

$$\frac{|\rho v_r \partial v_r / \partial r|}{|\mu \partial^2 v_r / \partial r^2|} \sim Re \frac{r}{a} \quad (8.38)$$

È possibile quindi concludere che nelle vicinanze della sfera ($r \simeq a$) la soluzione precedentemente descritta è fondata su una corretta ipotesi. Tuttavia, per valori di r sufficientemente grandi, tali che

$$\frac{r}{a} \gg Re^{-1} \quad (8.39)$$

l'ipotesi di trascurabilità dei termini inerziali non risulta verificata e la soluzione cessa di essere valida.

Tale problema, che d'altra parte non è considerabile particolarmente rilevante visto che per valori grandi di r tanto i termini inerziali quanto quelli viscosi sono presumibilmente piuttosto piccoli, è superabile adottando l'approccio di Oseen che porta a correggere il valore di c_D :

$$c_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3Re}{16} \right)$$

ma che non è qui illustrato.

8.3.2 Il caso del cilindro rigido

Consideriamo ora un cilindro, a sezione circolare, in moto uniforme attraverso un fluido viscoso, con velocità U normale al suo asse.

La formulazione e il metodo di soluzione del problema è del tutto analogo a quanto esposto precedentemente per la sfera. È qui opportuno usare coordinate cilindriche (r, θ, z) .

Si ha

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad v_z = 0 \quad (8.40)$$

e

$$\omega \equiv (0, 0, \omega_z) \quad (8.41)$$

con

$$\omega_z = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = -\nabla^2 \psi \quad (8.42)$$

dove

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \quad (8.43)$$

Il problema analitico è dunque posto dal sistema

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (8.44)$$

$$\psi = Ur \sin \vartheta \quad \text{per } r \rightarrow \infty \quad (8.45)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{per } r = a \quad (8.46)$$

dove si è indicato con a il raggio del cilindro.

È nuovamente opportuno porre

$$\psi = U \sin \vartheta f(r) \quad (8.47)$$

Sostituendo la (8.47) nelle (8.44), (8.45), (8.46) segue

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right)^2 f = 0 \quad (8.48)$$

$$f \rightarrow r \quad \text{per } r \rightarrow \infty \quad (8.49)$$

$$f = f' = 0 \quad \text{per } r = a \quad (8.50)$$

Non è difficile mostrare che le funzioni r ed $1/r$ soddisfano all'annullarsi del Laplaciano di f . Notando inoltre che $\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) r^3 = 8r$ e $\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) r \ln(r) = \frac{4}{r}$, è possibile verificare che la soluzione generale della (8.48) è

$$f = c_1 r^{-1} + c_2 r + c_3 r^3 + c_4 r \log(r) \quad (8.51)$$

La (8.51) non può soddisfare alle (8.49), (8.50). La (8.49) imporrebbe infatti l'annullarsi di c_3 e c_4 e determinerebbe c_2 . L'unica costante rimasta, la c_1 , dovrebbe quindi soddisfare contemporaneamente alle (8.50). La composizione di tale apparente paradosso si ottiene notando che la soluzione delle equazioni di Stokes non è valida per $r/a \gg O(Re^{-1})$, cioè a grandi distanze dal cilindro. È quindi lecito preservare il termine della (8.51) che cresce più lentamente al crescere di r , cioè $c_4 r \log(r)$. Abbastanza lontano dal cilindro, l'influenza dei termini inerziali presumibilmente sopprimerà l'influenza di tale termine. Ciò andrà verificato sulla base della soluzione delle equazioni di Navier-Stokes opportunamente modificate in modo da risultare idonee ad interpretare il moto a grandi distanze dal cilindro (schema di Oseen).

Imponendo $c_3 = 0$ e utilizzando le (8.49), (8.50) segue

$$\psi = cU \sin \vartheta \left\{ \frac{r}{a} \log \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{1}{2} \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \right\} \quad (8.52)$$

In termini vettoriali la (8.52) si scrive

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + c \mathbf{U} \left(-\frac{1}{2} \log \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2} \right) + c \mathbf{x} \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}}{r^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (8.53)$$

Seguendo un procedimento analogo a quello descritto nel caso della sfera si ottiene

$$D = 2\pi\mu U c \quad (8.54)$$

dove D è la resistenza esercitata dall'unità di lunghezza del cilindro.

La determinazione della costante c richiede la determinazione della struttura del campo di moto a grande distanza dal cilindro qui non illustrata. Si trova

$$c = \frac{2}{\log(7.4/Re)} \quad (8.55)$$

con un errore di ordine Re . Segue

$$c_D = \frac{D}{1/2 U^2 (2a)} = \frac{8\pi}{Re \log(7.4/Re)} \quad (8.56)$$

Il confronto con i risultati sperimentali, più complesso in questo caso che per la sfera (a causa degli effetti di bordo), si rivela soddisfacente fino a $Re \simeq 0.5$.

8.4 Teoria della lubrificazione

Fa parte dell'esperienza comune l'osservazione che due corpi solidi possono scivolare l'uno sull'altro molto facilmente quando fra di essi s'insinua uno straterello di fluido che agisce come lubrificante. L'esperienza rivela anche che alcune condizioni sono necessarie affinché il meccanismo di sostentamento si manifesti:

- i) il meato compreso fra i due corpi deve risultare debolmente convergente;
- ii) lo spessore del meato deve risultare sufficientemente piccolo affinché le tensioni tangenziali indotte dal moto di una delle pareti del meato siano grandi.

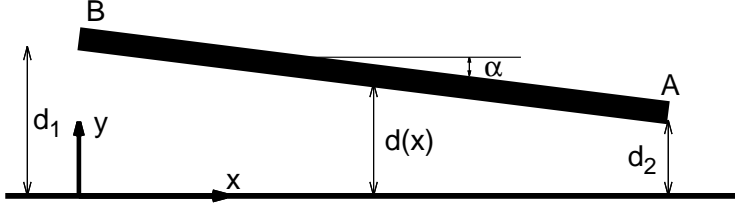


Figura 8.3: Schema di un meato di lubrificazione.

Sotto tali condizioni il moto può essere studiato trascurando gli effetti inerziali. Questi ultimi sono infatti legati alla convergenza delle linee di corrente e possono quindi essere resi piccoli a piacere riducendo il valore dell'angolo di convergenza.

Al fine di chiarire il meccanismo attraverso cui l'azione lubrificante si sviluppa esaminiamo un semplice problema analizzato per la prima volta da Reynolds (1896). Consideriamo il moto di un fluido viscoso incompressibile in un meato piano di spessore $d(x)$ lentamente variabile (figura 8.3). Sia ℓ la lunghezza del blocco su cui l'azione di sostentamento deve applicarsi e U la velocità della parete mobile.

Essendo il moto stazionario, se si trascurano i termini convettivi delle equazioni di Navier-Stokes, il problema del moto si riduce a quello dei moti unidirezionali con l'unica variante per cui lo spessore del meato risulta lentamente variabile nella direzione x . La soluzione per il campo di velocità, essendo qui $\gamma_i = -\partial p / \partial x$, si ottiene facilmente nella forma (si consulti il capitolo relativo ai moti unidirezionali)

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y[y - d(x)] + U \left[1 - \frac{y}{d(x)} \right] \quad (8.57)$$

Segue

$$q = \int_0^{d(x)} u dy = -\frac{dp}{dx} \frac{d^3}{12\mu} + \frac{U}{2} d \quad (8.58)$$

con q portata per unità di larghezza che deve risultare costante con x . La (8.58) porge dunque

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu \left(\frac{U}{d^2} - \frac{2q}{d^3} \right) \quad (8.59)$$

Essendo $d = d_1 - \alpha x$, la (8.59) si integra immediatamente nella forma

$$p - p_1 = \frac{6\mu}{\alpha} \left[U \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) - q \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d_1^2} \right) \right] \quad (8.60)$$

con $p_1 = p|_{x=0}$. Se il blocco galleggia sul fluido sicché

$$p|_{x=\ell} = p_1$$

dalla (8.60) segue

$$q = U \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \quad (8.61)$$

Sostituendo la (8.61) nella (8.60) si ottiene

$$p - p_1 = \frac{6\mu U}{\alpha} \frac{(d_1 - d)(d - d_2)}{d^2(d_1 + d_2)} \quad (8.62)$$

Le (8.57) e (8.62) definiscono la soluzione del problema. Alcune osservazioni sulla (8.62):

i) $(p - p_1)$ risulta ovunque positiva se $d_1 > d(x) > d_2$, per $0 < x < \ell$, cioè se il meato è convergente nel senso del moto indotto nel fluido dalla parete mobile;

ii) si ha

$$p - p_1 \sim 0 \left(\frac{\mu U \ell}{d_1^2} \right) \quad (8.63)$$

se $d_1 - d_2 \sim O(d_1)$, dunque $(p - p_1)$ può assumere valori molto grandi se d_1/ℓ è sufficiente piccolo.

Calcoliamo allora la forza di sostentamento per unità di larghezza

$$N = \int_0^\ell (p - p_1)|_{y=d(x)} dx = \frac{6\mu U}{\alpha^2} \left[\ln \frac{d_1}{d_2} - 2 \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} \right) \right] \quad (8.64)$$

La forza tangenziale per unità di larghezza esercitata dal fluido sulla superficie superiore si calcola anch'essa facilmente nella forma

$$T = \int_0^\ell -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=d(x)} dx = \frac{2\mu U}{\alpha} \left[3 \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} \right) - \ln \frac{d_1}{d_2} \right] \quad (8.65)$$

Segue

$$\frac{N}{|T|} = \frac{3}{\alpha} \frac{(D + 1) \ln D - 2(D - 1)}{(D + 1) \ln D - 3(D - 1)} \quad (8.66)$$

$$D = \frac{d_1}{d_2} \quad (8.67)$$

La (8.66) rivela che il rapporto $N/|T|$ può essere reso grande a piacere se, per assegnato D , α viene reso indefinitamente piccolo.

Naturalmente nei problemi di lubrificazione il valore di α , che nell'analisi precedente è assegnato, è una variabile.

La teoria precedente richiede, per la sua validità, che i termini convettivi delle equazioni di Navier-Stokes siano trascurabili rispetto ai termini viscosi. Dunque

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx} \gg \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.68)$$

Sulla base di quanto esposto in precedenza segue che

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim O\left(\alpha \frac{U^2}{d_1} \rho\right) \quad ; \quad \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim O\left(\mu \frac{U}{d_1^2}\right) \quad (8.69)$$

e quindi la (8.68) porge

$$\alpha Re = \alpha \left(\frac{\rho U d_1}{\mu} \right) \ll 1 \quad (8.70)$$

Dunque, condizione per la validità della teoria della lubrificazione è che sia piccolo non già il numero di Reynolds bensì un numero di Reynolds modificato definito dalla (8.70). Ciò estende notevolmente il campo di numeri di Reynolds entro cui i risultati precedenti sono da ritenersi significativi.

Si noti che la forza di sostentamento N può essere espressa nella seguente forma adimensionale

$$c_p = \frac{N}{\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\ell} = \frac{12}{(\alpha Re)} \left(\frac{D}{D-1} \right) \left(\ln D - 2 \frac{D-1}{D+1} \right) \quad (8.71)$$

Dunque c_p è grande se la condizione (8.70) è soddisfatta.

MOTI AD ALTI NUMERI DI REYNOLDS: FLUIDO IDEALE E MOTI IRROTAZIONALI

Dove, fra l'altro, si studiano i meccanismi del volo



Aeroplanino di carta

L'importanza dello studio dei moti irrotazionali, cioè privi di vorticità, nell'ambito della Meccanica dei Fluidi si coglie analizzando l'origine della vorticità nei moti che partono dallo stato di quiete. Come illustrato nel cap.7, la vorticità o la circolazione non possono essere originati all'interno di un fluido a densità costante soggetto a un campo di forze conservativo. Nella parte conclusiva del cap.7 si è visto come la generazione della vorticità in un fluido indefinito sia legata al moto in prossimità dei contorni dove gli effetti della viscosità non possono essere trascurati. In particolare, considerando contorni solidi quali la superficie di un corpo in moto ad alti numeri di Reynolds, in un fluido indefinito, se il corpo ha una forma affusolata e forma angoli piccoli con la direzione del moto, la vorticità resta confinata in strati limite adiacenti al corpo. Quando lo spessore dello strato limite è molto piccolo è lecito in prima approssimazione ignorarne la presenza e trattare il campo di moto esterno a esso, appunto come irrotazionale. Lo studio dei moti irrotazionali di fluidi ideali, caratterizzati da densità costante, fornisce le premesse per la successiva analisi del campo di moto nello strato limite in cui non si potrà invece ignorare il ruolo degli effetti viscosi e della vorticità.

9.1 Lo schema di fluido ideale

Lo schema di fluido ideale è utilizzato quando si possono ritenere trascurabili gli effetti della viscosità e schematizzare il moto del fluido supponendo il coefficiente di viscosità nullo.

Si osservi come sotto tale ipotesi il legame costitutivo si riduca a:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} \quad (9.1)$$

e dunque le tensioni esercitate da un fluido ideale in moto possono essere solo normali alla superficie a contatto con il fluido.

Utilizzando il teorema dell'energia meccanica, espresso dalla (3.23), è possibile affermare che in un fluido ideale e incompressibile la potenza spesa per deformare gli elementi materiali è nulla.

L'equazione del moto dei fluidi ideali e incompressibili è l'equazione di Eulero:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p \quad (9.2)$$

il cui integrale è fornito dal teorema di Bernoulli illustrato nel seguito. Esso è basato sulle seguenti quattro ipotesi: i) fluido ideale; ii) fluido barotropico; iii) campo di forze conservativo; iv) moto stazionario. L'ipotesi di fluido ideale porta a considerare l'equazione di Eulero, mentre quella di moto stazionario fa sì che si

annulli il termine $\partial \mathbf{v} / \partial t$. Infine, osservando che vale l'identità

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (9.3)$$

grazie all'ipotesi di fluido barotropico e a quella di campo di forze conservativo, segue

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) + \nabla \int \frac{dp}{\rho} - \nabla \varphi = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (9.4)$$

essendo $\mathbf{f} = \nabla \varphi$, con φ la funzione potenziale del campo di forze. Si ha infatti

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{dp}{\rho} = \frac{d}{dp} \int \frac{dp}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

essendo ρ funzione solo di p per l'ipotesi di fluido barotropico. Segue dunque

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - \varphi \right) = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (9.5)$$

Proiettando la (9.5) lungo una linea di corrente o di vorticità, entrambe ortogonali al prodotto $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - \varphi \right) = 0 \quad (9.6)$$

ove s è l'ascissa curvilinea lungo la curva scelta. Dalla (9.6) segue la costanza del carico totale H

$$H = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2g} + \int \frac{dp}{\gamma} - \frac{\varphi}{g} \quad (9.7)$$

lungo le linee di corrente e di vorticità. La (9.7) mostra che in corrispondenza dei punti di ristagno sulla superficie di un corpo investito da un fluido incompressibile che si muove con velocità costante U_0 , l'incremento della pressione relativa è pari a $\rho U_0^2 / 2$ (pressione di ristagno). Utilizzando infatti la costanza di H e considerando il punto di ristagno e un punto lontano dal corpo dove la velocità ha modulo U_0 segue:

$$\frac{U_0^2}{2g} + \frac{p_0}{g} - \frac{\varphi}{g} = \frac{p}{g} - \frac{\varphi}{g}$$

da cui

$$p - p_0 = \rho (\varphi - \varphi_0) + \rho \frac{U_0^2}{2} \quad (9.8)$$

dove il primo termine a destra della (9.8) rappresenta la differenza di pressione tra i punti considerati in condizioni statiche.

9.2 Lo schema di moto irrotazionale

Se la vorticità è nulla, il termine viscoso nell'equazione del moto si azzerà se si assume la densità costante. Si ha infatti

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (9.9)$$

Essendo ρ costante, la divergenza del campo di velocità si annulla per il principio di conservazione della massa, mentre il secondo termine a destra dell'espressione è uguale a zero essendo $\boldsymbol{\omega} = 0$. Quindi l'equazione che regola il moto irrotazionale di un fluido incomprimibile è ancora l'equazione di Eulero (9.2). Si noti che il carattere irrotazionale del moto non implica necessariamente l'assenza di dissipazioni viscosi, cioè il concomitante carattere ideale del moto. Infatti, ad esempio, le onde di gravità irrotazionali presentano deboli effetti dissipativi legati anche alla potenza dissipata dalle tensioni viscosi che fanno lavoro in ciascun punto interno alla regione del moto. Il lettore osservi a questo proposito che non vi è contraddizione fra la scomparsa del termine viscoso dalle equazioni di Navier-Stokes e la menzionata possibile presenza di tensioni viscosi nei moti irrotazionali. È la divergenza della componente viscosa del tensore delle tensioni che si annulla se il moto è irrotazionale, non già le tensioni viscosi. Queste dunque possono in generale essere non nulle e dar luogo a dissipazione di energia che può essere calcolata applicando il teorema della potenza meccanica illustrato nel paragrafo 3.6 del capitolo 3. Inoltre se si considera un corpo di volume V e superficie S immerso in un fluido incomprimibile in moto irrotazionale, la forza che il fluido esercita sul corpo è:

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{t} dS = \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (9.10)$$

Utilizzando il legame costitutivo, il teorema della divergenza e la (9.9) è facile mostrare che:

$$\mathbf{F} = \int_S -p \mathbf{n} dS \quad (9.11)$$

dunque la forza esercitata sul corpo è legata solo all'azione della pressione e ha la stessa espressione che si otterrebbe ipotizzando il fluido ideale. Infatti

$$2\mu \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = 2\mu \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = 0$$

considerato che, per un fluido a densità costante, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla^2 \mathbf{v}$ e $\nabla^2 \mathbf{v}$ si annulla in forza della (9.9).

Ci proponiamo ora di esaminare le proprietà dei campi di velocità che soddisfano alle condizioni

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv 0 \quad (\text{incomprimibilità}) \quad (9.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} \equiv 0 \quad (\text{irrotazionalità}) \quad (9.13)$$

La relativa semplicità delle (9.12), (9.13) ha reso possibile un notevole approfondimento di tale classe di campi di moto anche attraverso l'uso di potenti tecniche analitiche.

La condizione di irrotazionalità (9.13) implica, attraverso il teorema di Stokes, che

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (9.14)$$

dove l'integrale è esteso a una qualsiasi curva chiusa riducibile che giaccia interamente entro il campo di moto. La riducibilità della curva implica infatti, l'esistenza di una superficie aperta S , di cui la curva è frontiera, che giace interamente entro il fluido e tale che

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.15)$$

Il secondo membro della (9.15) risulta nullo per la condizione di irrotazionalità del moto. La quantità Γ è detta **circolazione**. Assegnati due punti O e P in una regione semplicemente connessa di fluido e due curve C_1 e C_2 distinte che uniscono O e P in modo da costituire nel loro insieme una curva chiusa riducibile (si veda la figura 9.1), segue quindi

$$\int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad (9.16)$$

In altre parole, l'integrale di linea di \mathbf{v} esteso a una curva C congiungente O e P assume lo stesso valore qualsiasi sia la curva; esso dipende dunque solo dai vettori posizione \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} caratterizzanti O e P rispettivamente. È dunque possibile definire la funzione $\phi(\mathbf{x})$ potenziale del campo della velocità tale che

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_0) + \int_O^P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad (9.17)$$

l'integrale essendo esteso a una qualsiasi delle curve suddette. Dalla (9.17) si ottiene

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (9.18)$$

dove si è indicato con $\phi(\mathbf{x})$ il 'potenziale' di velocità relativo al campo \mathbf{v} .

Osserviamo che vale l'inverso del risultato appena ottenuto. In altre parole: se la circolazione associata a un campo di velocità \mathbf{v} , relativa a una qualsiasi curva riducibile giacente per intero nel campo di moto, risulta nulla, allora $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ è un vettore identicamente nullo entro la regione del moto.

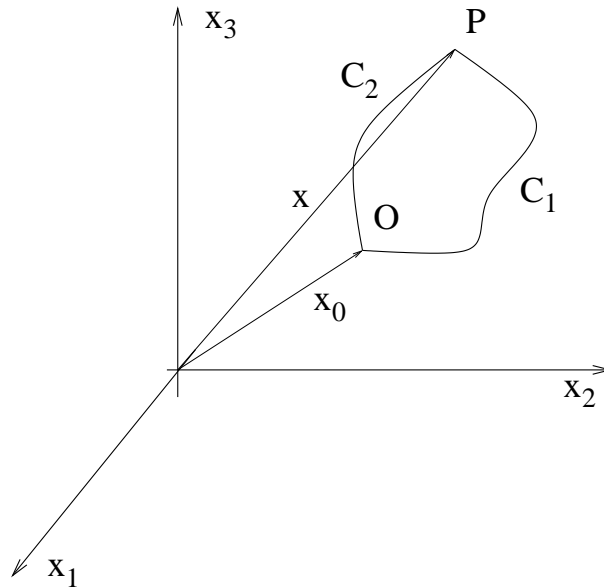


Figura 9.1

L'introduzione della funzione ϕ attraverso la (9.17) assicura che la condizione di irrotazionalità risulti soddisfatta; le tre componenti scalari di \mathbf{v} sono in questo caso determinate dalla conoscenza di una sola funzione scalare ϕ . La condizione di incomprimibilità pone allora:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (9.19)$$

la (9.19) dovendo risultare soddisfatta in ciascun punto del campo di moto. La funzione ϕ è **armonica** deve cioè soddisfare all'equazione di Laplace (9.19), ben nota equazione della Fisica-Matematica, di cui è importante evidenziare alcune rilevanti proprietà.

Anzitutto la **linearità** della (9.19) ha importanti conseguenze sulla semplicità relativa dell'analisi dei moti incomprimibili irrotazionali. Il vincolo dell'irrotazionalità è così stringente da annullare gli effetti di forte non linearità caratteristici del moto dei fluidi. Si osservi a questo proposito che una conseguenza della linearità è la validità del principio di sovrapposizione degli effetti: dunque soluzioni distinte della (9.19) possono essere sovrapposte sì da formare una nuova soluzione. Le corrispondenti soluzioni per \mathbf{v} possono essere sovrapposte ma analoga proprietà non è verificata, come vedremo, dalla pressione p , data la sua dipendenza non lineare da \mathbf{v} .

La (9.19) è un'equazione lineare alle derivate parziali di tipo ellittico. È noto che le soluzioni di equazioni di questo tipo e tutte le loro derivate rispetto a com-

ponenti di \mathbf{x} sono finite e continue in tutti i punti del campo di definizione; tale proprietà è dunque al più non soddisfatta in corrispondenza di punti della frontiera del campo. La distribuzione di velocità nei moti irrotazionali ha dunque una distribuzione regolare eccetto al più in corrispondenza delle frontiere dove possono essere assegnate singolarità per esempio di natura geometrica (angoli, spigoli, etc.).

Per determinare ϕ utilizzando la (9.19), è sufficiente assegnare sulla frontiera del fluido la componente normale di velocità (assegnare la ϕ è invece fisicamente meno rilevante) affinché la funzione potenziale sia determinata in modo univoco. L'imposizione di una condizione di aderenza alla parete è in genere incompatibile con l'irrotazionalità del moto.

I risultati precedenti possono essere estesi al caso in cui il fluido occupi una regione indefinitamente estesa, utile modello matematico per esempio di situazioni in cui un corpo solido è in moto entro un fluido le cui dimensioni lineari eccedono notevolmente le dimensioni lineari del corpo e che si trova in condizioni di quiete abbastanza lontano dal corpo.

Ribadiamo la crucialità di tali risultati: quando un corpo rigido si muove in un fluido altrimenti in quiete, il campo di moto irrotazionale è determinato unicamente dai valori istantanei della velocità del corpo (insieme con la sua geometria); né l'accelerazione né la storia passata dal moto del corpo risultano rilevanti. In particolare quando le pareti del corpo sono ferme, il fluido si trova necessariamente in condizioni di quiete ovunque. I moti istantanei del corpo e del fluido sono cioè strettamente legati.

L'ipotesi di irrotazionalità del moto associata all'incompressibilità del fluido consente di integrare le equazioni del moto anche nel caso non stazionario e di ottenere un importante risultato noto con la denominazione 'Teorema di Bernoulli'.

Osservando che vale l'identità

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (9.20)$$

l'equazione di Eulero si riduce a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (9.21)$$

Utilizzando la funzione potenziale di velocità, assunto conservativo il campo di forze e ricordando che $\boldsymbol{\omega} = 0$, la (9.21) diventa

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \varphi \right) = 0 \quad (9.22)$$

La (9.22) pone

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \varphi = F(t) \quad (9.23)$$

con $F(t)$ funzione arbitraria. La forma della F non è di particolare importanza, infatti è sufficiente definire

$$\tilde{\phi} = \phi - \int F dt.$$

e notare che

$$\nabla \tilde{\phi} = \nabla \phi.$$

La (9.23) diventa allora

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \varphi = \text{costante} \quad (9.24)$$

relazione che è valida ovunque nella massa fluida con un'opportuna scelta della funzione potenziale.

La (9.24) è di grande importanza perché fornisce una relazione esplicita per la pressione, una volta noto il campo di velocità.

9.2.1 Il moto irrotazionale indotto in un fluido dalla traslazione di un cilindro a sezione circolare

Il moto irrotazionale nella regione, non semplicemente connessa, esterna a un cilindro a sezione circolare di raggio r_0 è determinato non appena sia fissata la velocità di traslazione del baricentro del cilindro e il valore della circolazione Γ intorno al cilindro. Si noti che un'eventuale rotazione del cilindro intorno al suo asse non esercita alcuna influenza sul moto del liquido in assenza di effetti viscosi. Se la circolazione Γ attorno al cilindro è nulla il campo di moto generato dal cilindro che avanza con velocità costante U nella direzione contraria all'asse x è facilmente ottenibile dal campo di moto attorno a un cilindro investito da un moto uniforme.

Quest'ultimo può essere ottenuto risolvendo l'equazione di Laplace per calcolare la funzione potenziale di velocità ϕ . Questo è l'oggetto del prossimo paragrafo. Il paragrafo successivo invece descrive il campo di moto generato dal cilindro in moto se, attorno al cilindro stesso, il valore della circolazione Γ è non nullo.

Cilindro in moto stazionario con assenza di circolazione

Esaminiamo anzitutto il caso in cui il moto risulta caratterizzato dall'assenza di circolazione. In tal caso è opportuno riferire il moto ad assi solidali con il ci-

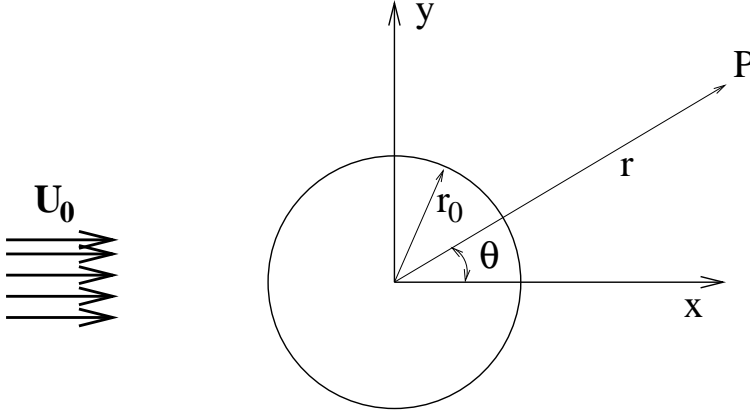


Figura 9.2

lindro. Rispetto a tale riferimento il cilindro stesso costituisce una superficie di corrente. Con riferimento alla figura 9.2 e utilizzando un sistema di coordinate cilindriche centrato nell'asse del cilindro, il campo di moto irrotazionale attorno al cilindro può quindi essere calcolato risolvendo l'equazione di Laplace (9.63) con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} &= 0 && \text{per } r = r_0 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) &\rightarrow U_0 (\cos \theta, -\sin \theta) && \text{per } r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (9.25)$$

L'equazione di Laplace, scritta in coordinate cilindriche (ricordando che il problema è piano) diviene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (9.26)$$

Considerando la particolare geometria del problema che richiede che ϕ sia una funzione periodica rispetto a θ di periodo 2π , è ragionevole cercare una soluzione della forma:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^N \left[\phi_n^{(c)}(r) \cos(n\theta) + \phi_n^{(s)}(r) \sin(n\theta) \right]. \quad (9.27)$$

Le condizioni al contorno all'infinito suggeriscono che tutte le $\phi_n^{(c)}(r)$, $\phi_n^{(s)}(r)$ a eccezione di $\phi_1^{(c)}(r)$ si annullano e si ha dunque:

$$\phi(r, \theta) = \phi_1^{(c)}(r) \cos \theta$$

Sostituendo quindi la (9.27) nella (9.26) si ottiene un'equazione differenziale per $\phi_1^{(c)}$:

$$\frac{d^2 \phi_1^{(c)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_1^{(c)}}{dr} - \frac{1}{r^2} \phi_1^{(c)} = 0. \quad (9.28)$$

Considerando ancora la forma delle condizioni al contorno:

$$\frac{d\phi_1^{(c)}}{dr}(r_0) = 0$$

$$\frac{d\phi_1^{(c)}}{dr} \rightarrow U_0 \text{ per } r \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{r} \phi_1^{(c)} \rightarrow U_0 \text{ per } r \rightarrow \infty$$

si può concludere che la soluzione può essere scritta come:

$$\phi(r, \theta) = U_0 f(r) \cos \theta \quad (9.29)$$

con

$$\frac{df}{dr} = 0 \text{ per } r = r_0$$

$$\frac{df}{dr} \rightarrow 1 \text{ per } r \rightarrow \infty$$

$$\frac{f}{r} \rightarrow 1 \text{ per } r \rightarrow \infty$$

che, sostituita nella (9.28) conduce all'equazione:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} f = 0 \quad (9.30)$$

la cui soluzione è

$$f(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}$$

da cui

$$\phi(r, \theta) = U_0 \left(c_1 r + \frac{c_2}{r} \right) \cos \theta$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti che si calcolano imponendo le condizioni al contorno. L'imposizione delle condizioni al contorno conduce a.

$$c_1 = 1; \quad c_2 = r_0^2$$

Si ottiene quindi la funzione potenziale di velocità che descrive il moto irrotazionale attorno al cilindro:

$$\phi(r, \theta) = U_0 r \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (9.31)$$

È inoltre possibile calcolare la velocità del fluido:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (9.32a)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (9.32b)$$

Le (9.32) mostrano che:

- la velocità normale v_r si annulla sulla superficie del cilindro;
- la velocità tangenziale sulla superficie del cilindro è:

$$v_\theta|_{r=r_0} = -2U_0 \sin \theta \quad (9.33)$$

Dunque sulla superficie del cilindro esistono due punti di ristagno in $\theta = 0, \pi$ e due punti in cui il modulo della velocità assume il valore massimo $2U_0$ ($\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$).

È poi immediato ricavare la distribuzione della pressione associata al campo di moto in esame. Infatti, applicando il teorema di Bernoulli fra due punti, di cui uno caratterizzato da $r \rightarrow \infty$ e l'altro sulla superficie del cilindro, risulta

$$p|_{r=r_0} = p_\infty + \rho \frac{U_0^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (9.34)$$

dove l'eccesso di pressione rispetto alla pressione all'infinito risulta massimo e pari a $\rho U_0^2/2$ in $\theta = 0, \pi$ (punti di ristagno) e minimo pari a $(-3\rho U_0^2/2)$ in $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$. Inoltre si hanno 4 punti in cui la pressione si annulla ($\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$). Questo risultato è anche immediatamente evidente considerando il coefficiente di pressione definito come:

$$c_p(\theta) = \frac{p - p_\infty}{\rho U_0^2/2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (9.35)$$

e mostrato in figura 9.3 per il caso in esame. La pressione decresce per θ compreso tra 0 e $\pi/2$ e cresce per θ compreso tra $\pi/2$ e π . Nell'ambito dello schema irrotazionale dunque la pressione risulta crescente sulla porzione del cilindro di

valle rispetto al moto che lo investe. Vedremo che tale circostanza risulta di notevole importanza per l'evoluzione dello strato limite viscoso che si sviluppa in corrispondenza del cilindro nel moto reale. Sulla base della distribuzione della pressione sulla superficie del cilindro e tenendo presente la (9.11) è possibile osservare che la forza esercitata del fluido sul cilindro è nulla. Infatti, introducendo un sistema di riferimento cartesiano (x, y) tale che $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ (figura 9.2), la componente F_x della forza per unità di larghezza (nella direzione z) risulta:

$$F_x = \int_0^{2\pi} -pn_x r_0 d\theta = \int_0^{2\pi} - \left[p_\infty + \frac{\rho U_0^2}{2} (1 - \sin^2 \theta) \right] \cos \theta r_0 d\theta \quad (9.36)$$

essendo $n_x = \cos \theta$. Considerato che $\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{2\pi} = 0$, segue l'annullarsi di F_x . In modo analogo è facile ottenere:

$$F_y = \int_0^{2\pi} -pn_y r_0 d\theta = \int_0^{2\pi} - \left[p_\infty + \frac{\rho U_0^2}{2} (1 - \sin^2 \theta) \right] \sin \theta r_0 d\theta \quad (9.37)$$

che implica l'annullarsi anche di F_y in quanto $\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{2\pi} = 0$. Tale risultato, in contrasto con l'esperienza, sarà discusso e interpretato nel seguito.

Cilindro in moto stazionario con circolazione

Il caso in cui il moto attorno al cilindro è caratterizzato da un valore non nullo della circolazione Γ si ottiene semplicemente sovrapponendo al potenziale di velocità (9.31) il potenziale $\phi^{(v)} = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$, potenziale del campo di moto caratterizzato dalla sola componente azimutale di velocità diretta in senso antiorario. È facile verificare che la circolazione del campo di velocità così ottenuto lungo una qualunque curva che racchiude l'origine è pari proprio a Γ . Si vedrà nel seguito che tale campo di moto è associato a un vortice puntuale posto nell'origine e caratterizzato dall'intensità (circolazione) Γ . Si trova dunque

$$\phi = U_0 \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (9.38)$$

Segue

$$v_\theta|_{r=r_0} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0} = -2U_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \quad (9.39)$$

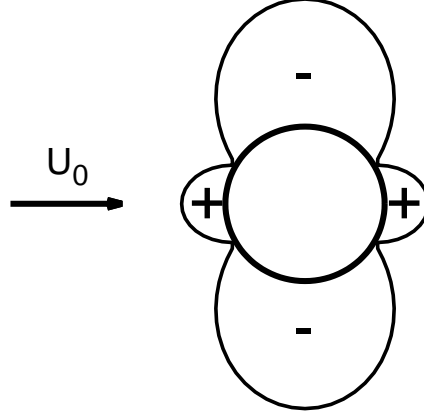


Figura 9.3: Distribuzione della pressione sulla superficie di un cilindro di sezione circolare investito da un moto uniforme di intensità U_0 nell'ipotesi di moto irrotazionale. Il valore massimo positivo è pari a $\frac{1}{2}\rho U_0^2$ mentre il minimo di pressione è pari a $\frac{3}{2}\rho U_0^2$

Dunque i punti di ristagno S_1 e S_2 si spostano verso il basso se Γ è negativo e verso l'alto se Γ è positivo. Più precisamente S_1 ed S_2 sono caratterizzati da valori di θ_s definiti dalla relazione

$$\theta_s = \arcsin\left(\frac{\Gamma}{4\pi r_0 U_0}\right) \quad (9.40)$$

Se $|\Gamma| > 4\pi r_0 U$ il punto di ristagno si sposta fuori dalla superficie del cilindro (si veda la figura 9.4). Si determina in tal caso una regione del moto adiacente il cilindro in cui il fluido resta confinato limitandosi a ruotare intorno al cilindro.

La pressione assume ora la forma

$$p|_{r=r_0} - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_0^2 \left[1 - \left(2\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0 U_0} \right)^2 \right] \quad (9.41)$$

e il coefficiente di pressione risulta

$$c_p = 1 - \left(2\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0 U_0} \right)^2 \quad (9.42)$$

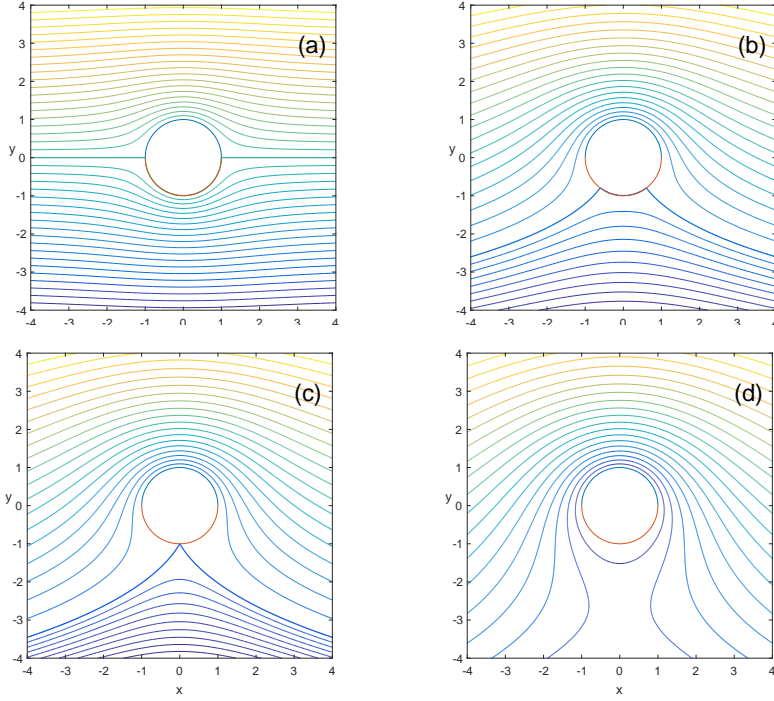


Figura 9.4: Linee di corrente attorno a un cilindro di raggio $r = a$ al variare di Γ . a) $\Gamma = 0$; b) $0 < \Gamma < 4\pi r_0 U$; c) $\Gamma = 4\pi r_0 U$; d) $\Gamma > 4\pi r_0 U$. Il fluido avanza da sinistra a destra.

Per valori positivi di Γ la pressione si riduce nella porzione superiore del cilindro mentre aumenta nella porzione inferiore. Ciò, come vedremo nel seguito, implica un'azione di sostentamento che il fluido esercita sul cilindro.

Valutiamo dunque l'azione risultante esercitata dal fluido sul cilindro. Utilizzando la (9.11) e osservando che $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$, si ha

$$F_x = - \int_0^{2\pi} p|_{\rho=r_0} \cos \theta r_0 d\theta = 0 \quad (9.43a)$$

$$F_y = - \int_0^{2\pi} p|_{\rho=r_0} \sin \theta r_0 d\theta = -\rho U_0 \Gamma \quad (9.43b)$$

Le (9.43) seguono dalla relazione (9.11) e dai calcoli svolti precedentemente nel caso in cui attorno al cilindro non è presente circolazione. Nel caso in esame, ai termini già calcolati nelle (9.36) e (9.37) che risultano nulli, è necessario aggiungere i seguenti due contributi \hat{F}_x e \hat{F}_y , rispettivamente:

$$\hat{F}_x = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\rho U_0^2 \left[-\left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 U_0} \right)^2 + 4 \sin \theta \frac{\Gamma}{2\pi r_0 U_0} \right] \cos \theta r_0 d\theta$$

$$\hat{F}_y = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\rho U_0^2 \left[-\left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 U_0} \right)^2 + 4 \sin \theta \frac{\Gamma}{2\pi r_0 U_0} \right] \sin \theta r_0 d\theta$$

Il primo contributo \hat{F}_x si annulla in quanto:

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta = 0$$

mentre il secondo porge:

$$\begin{aligned} \hat{F}_y &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\rho U_0^2 4 \frac{\Gamma}{2\pi r_0 U_0} \sin^2 \theta r_0 d\theta = \\ &= -\frac{\rho U_0 \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\rho U_0 \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right] d\theta = -\rho U_0 \Gamma \end{aligned}$$

9.2.2 Le forze agenti sui corpi bidimensionali in moto

Le (9.43) costituiscono un caso particolare, per corpi bidimensionali, di un importante risultato noto come 'Paradosso di D'Alembert': *un corpo in moto stazionario di traslazione in un fluido supposto in moto ideale irrotazionale non subisce alcuna azione da parte del fluido se la circolazione Γ è nulla.*

Se Γ risulta non nulla la (9.43b) è conseguenza di un risultato altrettanto importante, valido solo per moti bidimensionali, noto come teorema di Kutta-Joukowski (Kutta, 1910): *un corpo cilindrico (a sezione non necessariamente circolare) in moto di traslazione, con velocità U_0 costante, in un fluido dotato di moto ideale irrotazionale con circolazione Γ subisce da parte del fluido un'azione di sostentamento pari a $(\rho|U_0||\Gamma|)$ in direzione ortogonale a quella di avanzamento e in verso ruotato di 90° nel senso della circolazione, rispetto alla direzione del moto relativo del corpo rispetto al fluido.* Si dimostra inoltre che tali risultati risultano indipendenti dalle dimensioni, forma e orientamento del corpo, purché esso sia bidimensionale.

Per comprendere l'origine della circolazione che è presente attorno ai corpi di forma idrodinamica immersi in fluidi reali in moto, si consideri la curva C mostrata in figura 9.5, che racchiude un profilo alare di corda c , investito da un

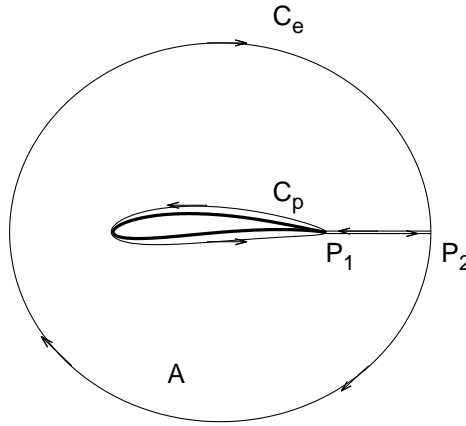


Figura 9.5

fluido in moto uniforme e si calcoli la circolazione attorno ad essa. La curva chiusa C sia costituita da un cerchio C_e di raggio R_e , da una curva C_p prossima al profilo alare ma non comprendente lo strato molto sottile in cui è presente vorticità (strato limite) e da due segmenti coincidenti percorsi in senso opposto che uniscono le due curve citate precedentemente.

Detta A l'area delimitata dalla curva C e applicato il teorema di Stokes si ottiene:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.44)$$

avendo indicato con \mathbf{n} la normale alla superficie A . La (9.44) mette in relazione la vorticità contenuta entro l'area A con la circolazione attorno a C . Essendo irrotazionale il moto all'esterno dello strato limite, il flusso di vorticità è nullo e quindi la circolazione valutata su C_e e quella valutata lungo C_p sono uguali se le due curve sono percorse nello stesso senso. Se ora valutiamo la circolazione lungo una curva chiusa formata dalla curva C_p , dal profilo alare stesso e da due segmenti coincidenti percorsi in senso opposto, il teorema di Stokes porge l'uguaglianza fra la circolazione valutata lungo la curva C_p e il flusso di vorticità calcolato sull'area racchiusa dalla curva che è chiaramente il flusso della vorticità presente negli strati limite attorno al profilo alare (la circolazione valutata lungo il profilo alare si annulla essendo nulla ivi la velocità).

9.3 Moti irrotazionali non stazionari

Si consideri ora il caso in cui U_0 dipende dal tempo, in altre parole il caso di un corpo fermo immerso in un fluido in moto non stazionario con velocità $U_0(t)$.

Siccome nell'equazione di Laplace, che fornisce il potenziale di velocità, non compaiono derivate parziali rispetto al tempo, la funzione ϕ ha la stessa forma di quella ottenuta nel caso di moto stazionario, dove però U_0 ora dipende dal tempo, che riveste il ruolo di parametro. In altre parole il campo di moto si adatta istantaneamente alla velocità imposta lontano dal corpo. L'applicazione del teorema di Bernoulli tra un punto A posto a grande distanza dal corpo e un punto C sulla superficie del corpo, dove la velocità si annulla, fornisce la differenza di pressione tra il punto C e il punto A :

$$p_C - p_A = \rho \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_A - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_C + \frac{U_0^2}{2} \right]$$

Osservando che $\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_A$ è una funzione del tempo, che indichiamo con $\chi(t)$, segue:

$$p_C - p_A = \rho \left[\chi(t) - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_C + \frac{U_0^2}{2} \right]$$

Nel caso in cui il corpo in esame sia un cilindro, la ϕ è fornita dalla (9.31) dove però ora U_0 dipende dal tempo, ed è facile verificare che:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_C = 2\dot{U}_0 r_0 \cos \theta$$

ove $\dot{U}_0 = \frac{dU_0}{dt}$ (nel seguito un punto sopra una variabile indica la sua derivata rispetto al tempo).

È poi facile verificare che la forza esercitata dal fluido sul cilindro è:

$$F_x = \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{r=r_0} \cos \theta r_0 d\theta = 2\rho\pi r_0^2 \dot{U}_0;$$

$$F_y = \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{r=r_0} \sin \theta r_0 d\theta = 0.$$

Si ottiene dunque una resistenza non nulla indotta dall'accelerazione del corpo che può in generale porsi nella forma

$$F_x = \rho\alpha V \dot{U}_0 \quad (9.45)$$

essendo V il volume del corpo per unità di lunghezza e α un **coefficiente di massa aggiunta** che, per il cilindro a sezione circolare fermi in un fluido in moto, assume

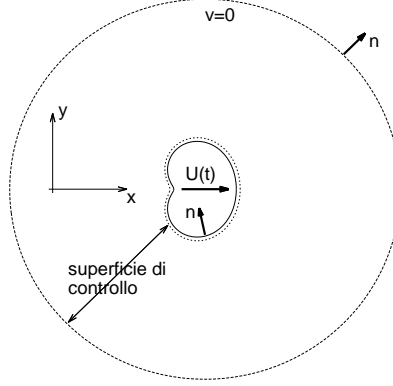


Figura 9.6

il valore pari a 2. In un moto a potenziale la forza richiesta per accelerare un corpo al suo interno può sempre essere espressa come la forza necessaria per accelerare la massa di un opportuno volume di fluido, che dipende dalla forma del corpo e dalla direzione del moto.

9.3.1 Energia cinetica

Per meglio comprendere l'origine della forza di massa aggiunta, si consideri un corpo in moto in un fluido in quiete all'infinito (si veda la figura 9.6) e un volume di controllo $V(t)$ tale che parte del contorno si appoggi alla superficie del corpo mentre la parte restante sia a grandi distanze dal corpo dove la velocità del fluido è nulla. Il corpo si muove con velocità $\mathbf{v} = (U_0(t), 0, 0)$ che dipende dal tempo. Utilizzando il teorema della potenza meccanica, ipotizzando il fluido ideale e la gravità diretta lungo l'asse z , è possibile ottenere:

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \int_S -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (9.46)$$

dove la derivata temporale dell'energia cinetica contenuta nel volume non si annulla essendo il moto non stazionario. Osservando che a grandi distanze dal corpo il fluido è fermo e ricordando che la condizione di non-compenetrazione impone che $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = n_i v_i = n_x U_0(t)$ sulla superficie del corpo, si ottiene:

$$\int_S -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = -U_0(t) \int_{S_c} p n_x dS$$

e quindi:

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = U_0(t)F_D \quad (9.47)$$

dove si è utilizzata la relazione

$$F_D = \int_{S_c} p(-n_x) dS \quad (9.48)$$

che fornisce la forza che il fluido esercita sul corpo. La (9.47) mostra che se il corpo si muove in moto non stazionario e quindi l'energia cinetica risulta funzione di t e x , il corpo subisce una forza di resistenza.

9.3.2 Calcolo della forza di massa aggiunta per un cilindro a sezione circolare

Come è facile intuire, esiste una differenza tra il caso di un corpo che si muove in moto non stazionario in un fluido fermo e il caso in cui il fluido si muove attorno a un corpo fermo. Si consideri quindi un corpo in moto con velocità $U_0(t)$ in un fluido fermo. La (9.47) mostra che la potenza necessaria per muovere il corpo è uguale alla variazione nel tempo dell'energia cinetica del fluido. Appare quindi evidente che se l'energia cinetica del fluido aumenta in conseguenza all'accelerazione del fluido, sarà stato necessario applicare una forza per accelerare il corpo.

A titolo di esempio si consideri un cilindro in moto non stazionario con velocità $U_0(t)$. Proponiamoci di valutare gli effetti di non stazionarietà del moto.

Il potenziale del moto stazionario attorno a un cilindro fermo e investito da un fluido con velocità costante U_0 , rispetto a un sistema di riferimento cartesiano (x, y) centrato nell'asse del cilindro, è fornito dalla (9.31). Se invece il cilindro è in moto con velocità U_0 e il fluido lontano è fermo, il potenziale di velocità, rispetto a un sistema di riferimento con l'origine istantaneamente coincidente con il centro della sezione del cilindro, risulta:

$$\phi = U_0 \frac{r_0^2}{r(t)} \cos \theta(t) \quad (9.49)$$

La (9.49) si ottiene semplicemente sottraendo il potenziale associato a un moto uniforme di intensità U_0 dalla (9.31). Si osservi che, se si considera un punto fisso nel dominio fluido i valori di r e θ che individuano il punto verranno a dipendere dal tempo. Infine se il cilindro si muove di moto non stazionario, la velocità U_0 sarà anch'essa funzione del tempo. Dalla (9.49) è quindi possibile calcolare le

componenti della velocità sulla superficie del cilindro:

$$v_r|_{r=r_0} = -U_0 \cos \theta \quad v_\theta|_{r=r_0} = -U_0 \sin \theta \quad (9.50)$$

Applicando il teorema di Bernoulli e ricordando che il moto ora è non stazionario, si ottiene

$$\frac{p_\infty}{\rho} = \frac{p|_{r=r_0}}{\rho} + \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2}|_{r=r_0} + \frac{\partial \phi}{\partial t}|_{r=r_0} \quad (9.51)$$

da cui:

$$p|_{r=r_0} - p_\infty = -\frac{\rho U_0^2}{2} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}|_{r=r_0} \quad (9.52)$$

L'azione risultante dalle forze di pressione agenti sul cilindro differisce dunque dal risultato relativo al caso stazionario per il contributo associato a $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, cioè:

$$F_x = \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}|_{r=r_0} \cos \theta r_0 d\theta; \quad F_y = \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}|_{r=r_0} \sin \theta r_0 d\theta \quad (9.53)$$

Si ha

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}|_{r=r_0} = \dot{U}_0 r_0 \cos \theta + \frac{\partial \phi}{\partial r}|_{r=r_0} \dot{r} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}|_{r=r_0} \dot{\theta} \quad (9.54)$$

o, essendo

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}$$

segue, con le (9.50)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}|_{r=a} = \dot{U}_0 r_0 \cos \theta + U_0^2 \cos^2 \theta + U_0^2 \sin^2 \theta$$

donde

$$F_x = \rho \pi r_0^2 \dot{U}_0 \quad F_y = 0 \quad (9.55)$$

La forma della (9.45) consente poi di interpretare la forza di massa aggiunta come la forza che sarebbe necessaria per accelerare il corpo se questo avesse una massa virtuale aumentata di $\rho \alpha V$ rispetto alla sua massa reale.

Allo stesso risultato si può pervenire anche introducendo un sistema di riferimento non inerziale, solidale con il cilindro. Nell'equazione di Eulero saranno ora presenti termini legati all'accelerazione di trascinamento:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{U}}) - \nabla p \quad (9.56)$$

e il teorema di Bernoulli in questo caso afferma che la quantità

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \frac{p}{\rho} + gz + \dot{U}_0 x$$

rimane costante in tutta la massa fluida.

L'applicazione del teorema di Bernoulli tra un punto A, posto a grande distanza dal cilindro e un punto C, sulla superficie del cilindro, porge:

$$p_C - p_A = \rho \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_A - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_C + \frac{U_0^2}{2} + \dot{U}_0 r \cos \theta \right]$$

Il calcolo della forza esercitata sul cilindro, utilizzando la precedente distribuzione di pressione, consente di ottenere la (9.57)

9.3.3 L'equazione di Morison

È noto dall'esperienza che nei fluidi reali è presente una forza nella direzione del moto anche se il moto è stazionario. Utilizzando il teorema II, è possibile mostrare che tale forza è esprimibile nella forma

$$F_x = c_D(Re) \frac{\rho U_0^2}{2} A$$

ove A è l'area maestra del corpo, cioè l'area vista dal fluido che investe il corpo, e c_D è un coefficiente, detto di resistenza, che dipende dal numero di Reynolds $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$, essendo L una dimensione caratteristica del corpo. La figura 10.12 nel capitolo 10 mostra l'andamento di $c_D(Re)$ per un cilindro a sezione circolare.

Se il moto oscilla nel tempo con periodo T , la valutazione della forza nella direzione del moto può essere eseguita utilizzando l'espressione di Morison

$$F_x = c_D(Re, Kc) \frac{\rho U_0 |U_0|}{2} A + c_M(Re, Kc) \rho \dot{U}_0 V$$

ove sia il coefficiente di resistenza c_D sia quello di massa aggiunta c_M dipendono dal numero di Reynolds e dal numero di Keulegan-Carpenter Kc definito da

$$Kc = \frac{\hat{U}_0 T}{L}$$

essendo \hat{U}_0 l'ampiezza delle oscillazioni di velocità e T il loro periodo (anche il numero di Reynolds, nel caso di un moto oscillante, viene definito utilizzando \hat{U}_0). Come visto precedentemente, la forza esercitata dal fluido sul corpo può poi avere una componente ortogonale alla direzione del moto il cui modulo viene usualmente espresso nella forma

$$F_y = c_L(Re, Kc) \frac{\rho U_0^2}{2} A$$

ove c_L è un coefficiente di portanza che dipende da Re e Kc . In figura 9.7 è mostrata la dipendenza, ottenuta per via sperimentale, dei coefficienti c_D e c_M dai parametri Re e Kc per un cilindro a sezione circolare.

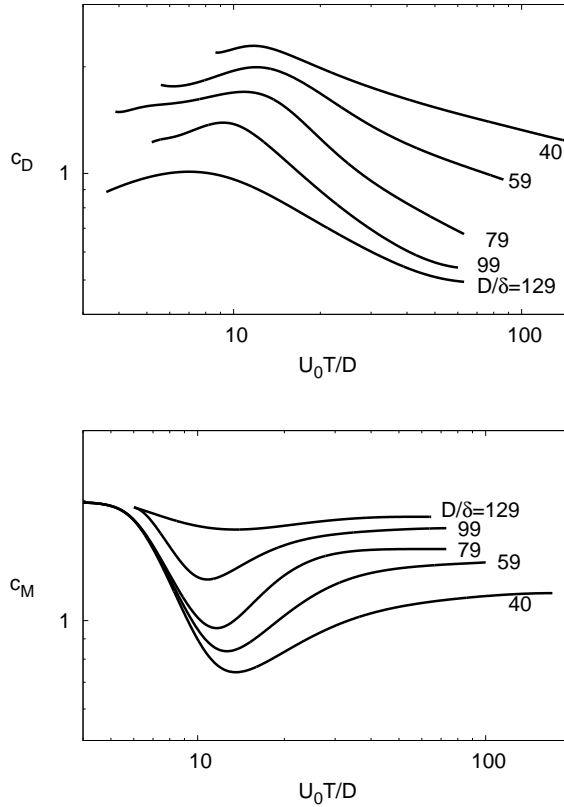


Figura 9.7: Dipendenza di c_D (coefficiente di resistenza) e c_M (coefficiente di massa aggiunta) dal numero di Keulegan-Carpenter per un cilindro circolare. Il parametro D/δ è pari a $\sqrt{\pi \frac{Re}{Kc}}$ (figura adattata da Sleath (1984)).

9.4 Moti irrotazionali piani

Nel caso particolare di moto bidimensionale, \mathbf{v} soddisfa a condizioni che rendono utile l'uso della teoria delle variabili complesse.

Posto $\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y, 0)$, la condizione di irrotazionalità impone

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (9.57)$$

La condizione di incomprimibilità, come si è visto nel capitolo 2, consente poi di definire una funzione di corrente ψ che soddisfa alle relazioni

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (9.58)$$

È immediato verificare che, se sono valide le (9.58), l'equazione di continuità è identicamente soddisfatta. Le due funzioni scalari $\phi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ sono evidentemente legate dalle condizioni

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9.59)$$

Le (9.59) sono ben note nella teoria delle funzioni di variabile complessa quali condizioni di Cauchy-Riemann. Esse assicurano l'unicità della derivata della funzione $(\phi + i\psi)$ della variabile complessa $(z = x + iy)$ rispetto alla variabile stessa. Le (9.59) sono condizioni necessarie e sufficienti, posto che le quattro derivate nella (9.59) siano finite e continue in V , per la analiticità (o regolarità) di $(\phi + i\psi)$ in V . Le funzioni di variabile reale ϕ e ψ diconsi coniugate. Denomineremo la funzione

$$W = \phi + i\psi \quad (9.60)$$

potenziale complesso, relativo al moto irrotazionale descritto dalle funzioni ϕ e ψ .

È immediata conseguenza del legame della teoria dei moti irrotazionali piani con la teoria delle funzioni di variabile complessa che qualsiasi funzione analitica di $z = x + iy$ può interpretarsi quale potenziale complesso di un moto irrotazionale piano. Inoltre, poiché l'analiticità di W implica che la derivata

$$\frac{dW}{dz} = \lim_{|\delta z| \rightarrow 0} \frac{\delta W}{\delta z} \quad (9.61)$$

risulti indipendente dalla scelta dell'incremento δz nel piano (x, y) , segue:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y \quad (9.62)$$

Dunque la derivata del potenziale complesso ha modulo pari al modulo della velocità e si rappresenta nel piano complesso con un vettore simmetrico (rispetto all'asse reale) al vettore velocità.

Le (9.59) hanno diverse conseguenze. Anzitutto sia ϕ che ψ sono funzioni armoniche. In altre parole

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0 \quad (9.63)$$

dovendo risultare soddisfatta sia l'equazione di continuità che la condizione di irrotazionalità. Inoltre le linee equipotenziali di velocità risultano ortogonali alle linee di corrente. Infatti

$$(\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (9.64)$$

Tale risultato cessa di essere valido in corrispondenza di punti di ristagno cioè dei punti nei quali si annulla il vettore velocità.

Di conseguenza, ricordando che $\mathbf{v} = \nabla \phi$, sulle linee di corrente ψ rimane costante.

9.4.1 Moti irrotazionali piani elementari e loro sovrapposizione

Moto uniforme

È immediato verificare che il moto uniforme $\mathbf{v} = (U, V)$ è irrotazionale ed è caratterizzato dal potenziale complesso

$$W = (U - iV)z \quad (9.65)$$

Si ha infatti

$$\phi = Ux + Vy$$

$$\psi = Uy - Vx$$

Sorgente

Per sorgente si intende un picco isolato della velocità di dilatazione cubica $\Delta = \nabla \cdot \mathbf{v}$. Esso simula un apporto esterno (o una sottrazione) di massa localizzata in un punto.

Per studiare questo moto è opportuno fare riferimento al sistema di coordinate cilindriche (r, θ) illustrate in figura (9.8). Rispetto a tale sistema di coordinate:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

oppure

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

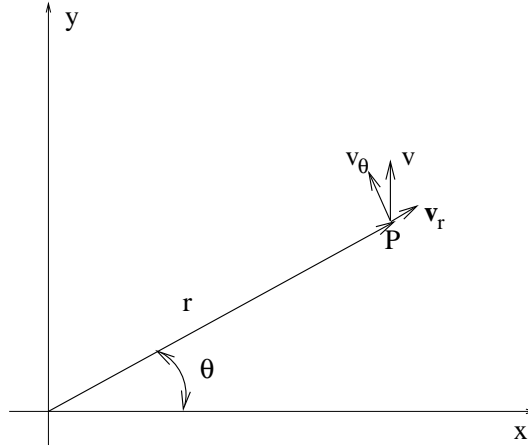


Figura 9.8

e quindi risulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (9.66)$$

Se la posizione della sorgente coincide con l'origine degli assi, il potenziale e la funzione di corrente, sono:

$$\phi(x) = \frac{q}{2\pi} \ln r \quad (9.67)$$

$$\psi(x) = \frac{q}{2\pi} \vartheta \quad (9.68)$$

La quantità q è l'intensità della sorgente e uguaglia la portata volumetrica per unità di profondità (nella direzione z) attraverso una qualsiasi superficie chiusa che racchiude l'origine. Se q risulta negativo tale moto elementare è denominato *pozzo*.

Le superfici equipotenziali sono cilindri i cui assi coincidono con la sorgente e le superfici di corrente sono piani appartenenti al fascio con asse coincidente con la sorgente. Nel piano (r, θ) si ha l'andamento delle linee di corrente ed equipotenziali mostrato in figura 9.9. È evidente che il verso di percorrenza delle linee di corrente dipende dal segno di q .

Dalle (9.67), (9.68), essendo

$$\ln(z) = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln(e^{i\theta}) = \ln r + i\theta$$

segue

$$W = \frac{q}{2\pi} \ln(x + iy) = \frac{q}{2\pi} \ln z \quad (9.69)$$

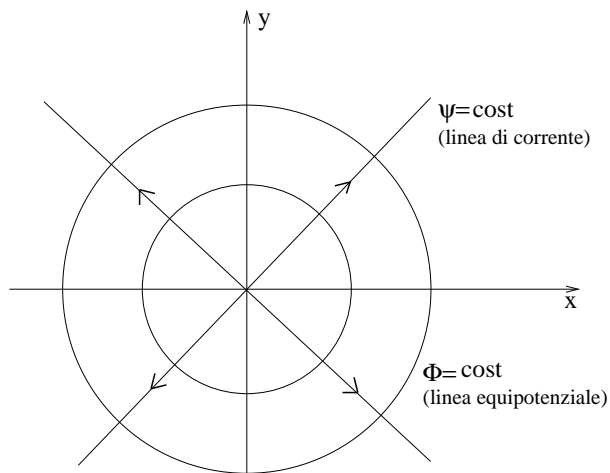


Figura 9.9: Linee equipotenziali e di corrente generate da una sorgente posta nell'origine degli assi.

Il concetto di sorgente puntuale ha anche importanza per la rappresentazione diretta di qualche moto di fluidi reali.

La rilevanza della nozione di sorgente puntuale è tuttavia maggiormente legata al suo uso quale moto elementare che, utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, consente di costruire moti irrotazionali complessi.

Vortice puntuale

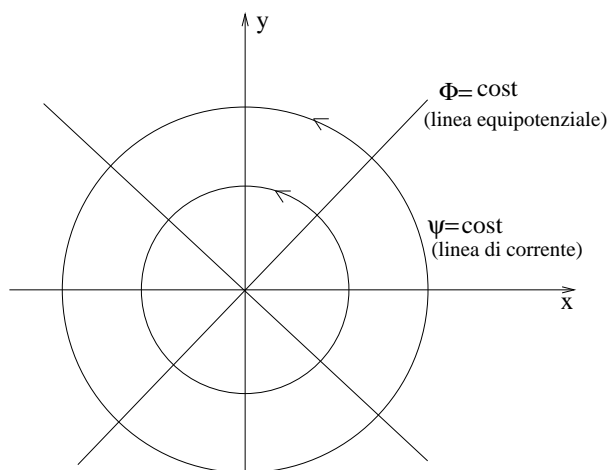


Figura 9.10: Linee equipotenziali (linee continue) e di corrente (linee tratteggiate) generate da un vortice posto nell'origine degli assi.

Consideriamo, ora, un vortice rettilineo, cioè un moto incompressibile caratterizzato da una distribuzione di vorticità nulla ovunque eccetto che lungo una retta, ortogonale al piano del moto, dove si ha un 'picco' di vorticità.

A tale nozione si può pervenire considerando un tubo vorticoso che si contrae fino a ridursi a una linea mantenendo costante l'intensità del tubo vorticoso.

Il potenziale e la funzione di corrente del moto, supponendo che la posizione del vortice coincida con l'origine degli assi, sono

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (9.70)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (9.71)$$

donde

$$W = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(x + iy) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (9.72)$$

dove Γ è una costante che coincide con la circolazione attorno a ogni linea chiusa che racchiude l'origine. Le superfici equipotenziali sono piani appartenenti al fascio con asse coincidente con l'asse del vortice mentre le superfici di corrente sono cilindri i cui assi coincidono con il vortice (si veda la figura 9.10). Il verso di percorrenza delle linee di corrente dipende dal segno di Γ .

Coppia di vortici

È possibile poi considerare il campo di moto generato dalla presenza di due vortici puntuali di circolazione opposta $\Gamma_1 = \Gamma$ e $\Gamma_2 = -\Gamma$ posti in $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, rispettivamente (figura 9.11). La funzione potenziale e la funzione di corrente sono facilmente valutabili sovrapponendo i campi di moto generati dai singoli vortici e il lettore può facilmente ottenere il risultato. Si vuole qui mostrare come la coppia di vortici si muova a causa della velocità autoindotta. Cioè il vortice denotato dal pedice 1 si muove a causa della velocità indotta dal vortice denotato dal pedice 2 e viceversa. Infatti il vortice in Γ_2 induce nella posizione P_1 una velocità, ortogonale al segmento che congiunge P_1 e P_2 , pari a

$$v_{\theta_1} = -\frac{\Gamma}{2\pi \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

mentre Γ_1 induce nella posizione P_1 una velocità:

$$v_{\theta_2} = \frac{\Gamma}{2\pi \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Dunque la coppia di vortici si muove nella direzione ortogonale al segmento che unisce x_2 e x_1 con una velocità pari a $|\Gamma|/(2\pi \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2})$.

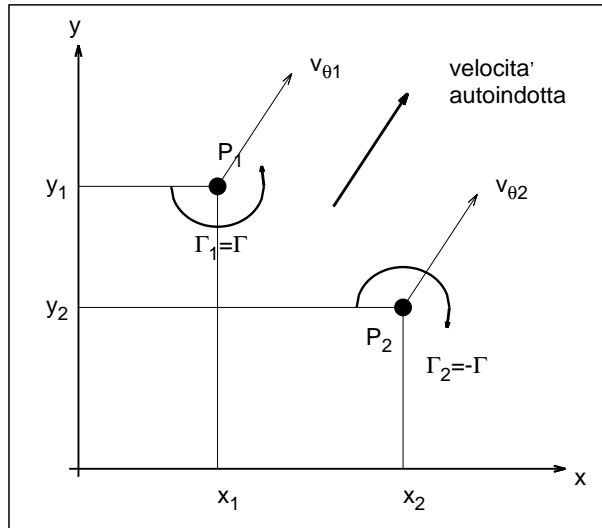


Figura 9.11: Coppia di vortici di circolazione $\pm\Gamma$ nel piano (x, y) .

La figura 9.12 mostra due coppie di vortici che si muovono l'una contro l'altra proprio a causa della loro velocità autoindotta, interagiscono e danno origine a due nuove coppie che si muovono in direzione ortogonale a quella in cui si muovevano precedentemente.

Se i due vortici che formano la coppia hanno valori diversi di $|\Gamma|$ accanto al moto di traslazione della coppia è possibile osservare la rotazione di un vortice attorno all'altro.

Analogamente, considerando un problema a simmetria assiale, è possibile comprendere la velocità autoindotta di un anello vorticoso (si veda la figura 9.13 che mostra un anello vorticoso generato dall'emissione pulsante di gas dal cratere del vulcano Etna e visualizzato dal fumo emesso durante l'emissione).

Dipolo idrodinamico e doppietta

Consideriamo una sorgente e un pozzo di uguale intensità q localizzati nei punti z_1 e z_2 , rispettivamente. Segue

$$W = \frac{q}{2\pi} \ln \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \quad (9.73)$$

Lasciamo al lettore di verificare che il potenziale complesso (9.73) corrisponde a un moto caratterizzato da linee di corrente costituite da circonferenze passanti per il pozzo e la sorgente e percorse nel senso sorgente-pozzo.

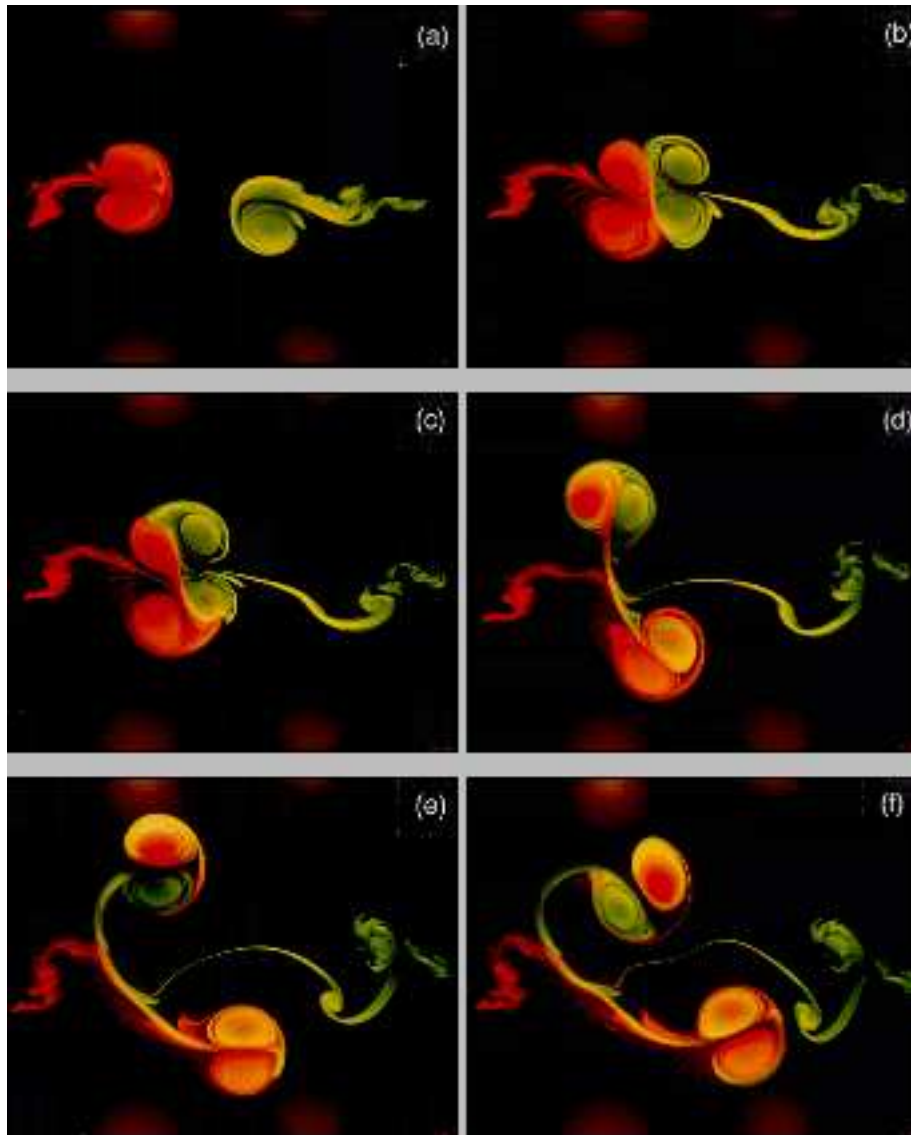


Figura 9.12: Visualizzazione della traiettoria di due coppie di vortici che inizialmente si muovono l'una contro l'altra (Foto dell'Università Tecnica di Eindhoven, NL)



Figura 9.13: In alto, al centro della foto a sinistra è visibile un anello vorticoso generato da un getto di gas dal cratere sud-est dell'Etna durante l'eruzione dell'11 novembre 2013. L'anello è visualizzato dal fumo emesso dal cretere. Nella foto a destra è possibile osservare i dettagli dell'anello vorticoso visualizzato dal fumo (Foto del vulcanologo Tom Pfeiffer).

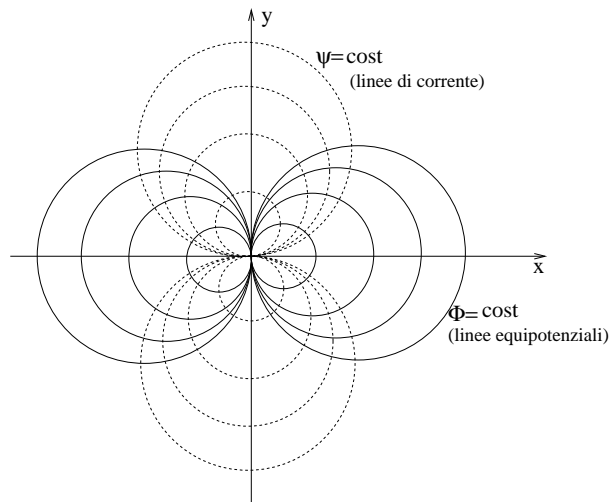


Figura 9.14: Linee equipotenziali e di corrente generate da una doppietta posta nell'origine degli assi.

Risulta di particolare utilità esaminare il caso in cui la sorgente e il pozzo siano posizionati rispettivamente in a e $-a$ con a tendente a 0. Precisamente si definisce doppietta il caso limite di un dipolo idrodinamico in cui $|z_1 - z_2| = 2a$ tende a zero con q indefinitamente crescente in modo tuttavia che si mantenga costante il prodotto $\mu = 2qa$.

Osservando che in un intorno di $a = 0$

$$\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right) \approx \ln\left[(z-a)\left(\frac{1}{z} - \frac{a}{z^2}\right)\right] \approx \ln\left[1 - \frac{2a}{z}\right] \approx -\frac{2a}{z}$$

è facile ottenere il potenziale complesso della doppietta localizzata nell'origine degli assi:

$$W = -\frac{\mu}{2\pi z} \quad (9.74)$$

mentre il potenziale e la funzione di corrente nel sistema di coordinate cilindriche sono:

$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{r}; \quad \psi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} \quad (9.75)$$

L'andamento di linee di corrente ed equipotenziali è rappresentato in figura 9.14. Si noti che tutte le circonferenze passano per 0.

Sovrapposizione di moti elementari piani

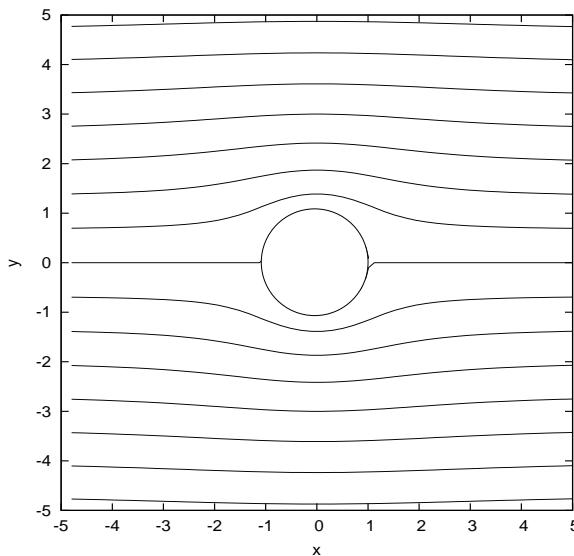


Figura 9.15

In precedenza si è mostrato che le funzioni potenziale e di corrente sono entrambe armoniche e soddisfano il principio di sovrapposizione degli effetti. È evidente che anche il potenziale complesso $W(z)$ soddisfa a tale proprietà. È quindi possibile costruire potenziali complessi di nuovi campi di moto sovrapponendo potenziali complessi di campi di moto più semplici.

Si consideri ad esempio il potenziale complesso ottenuto sovrapponendo quello di un moto uniforme parallelo all'asse x e di intensità U_0 a quello di una doppietta posta nell'origine degli assi e di intensità μ pari a $-2\pi r_0^2 U_0$. Si ottiene:

$$W(z) = U_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right). \quad (9.76)$$

È immediato verificare che la velocità

$$v_x + iv_y = \frac{dW}{dz} = \overline{U_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2}\right)} \quad (9.77)$$

ove il soprassegno indica la quantità complessa coniugata della quantità sottostante, si annulla per $|z| = r_0$ e tende a quella del moto uniforme per valori di $|z|$ molto più grandi di r_0 . Inoltre è facile calcolare le funzioni potenziale e di corrente:

$$\phi = U_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) r \cos \theta; \quad \psi = U_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) r \sin \theta. \quad (9.78)$$

Le linee di corrente che corrispondono al campo di moto sono mostrate in figura 9.15. Appare evidente, sulla base di quanto esposto precedentemente, che il campo di moto ottenuto rappresenta quello che si realizza attorno a un cilindro bidimensionale.

9.4.2 Il metodo della trasformazione conforme

Si è evidenziato in precedenza che potenziale di velocità ϕ e funzione di corrente ψ relativi a moti incompressibili irrotazionali piani sono caratterizzati da alcune proprietà 'coniugate' di rilevante importanza. Tali proprietà sono sintetizzabili nell'affermazione che il potenziale complesso $W (= \phi + i\psi)$ è una funzione analitica di z nella regione del piano complesso in cui il moto è definito. Reciprocamente ogni funzione analitica di z può riguardarsi quale potenziale complesso relativo a un qualche campo di moto irrotazionale piano. Quest'ultima affermazione costituisce l'indicazione di un procedimento idoneo alla determinazione di campi di moto irrotazionali piani.

Un procedimento diretto alla determinazione di campi di moto irrotazionali piani è costituito dal metodo delle trasformazioni conformi di funzioni di variabile complessa.

Trasformazioni conformi

Sia data la funzione di variabile complessa

$$z = f(\zeta) \quad (9.79)$$

dove $z = x + iy$ e $\zeta = \xi + i\eta$. Essa istituisce una corrispondenza geometrica fra i due piani (x, y) e (ξ, η) tale che all'elemento lineare infinitesimo $d\zeta$ nel piano ζ corrisponde l'elemento infinitesimo dz nel piano z (si veda la figura 9.16). Siano dunque

$$d\zeta = |d\zeta|e^{i\alpha}; \quad dz = |dz|e^{i\beta}$$

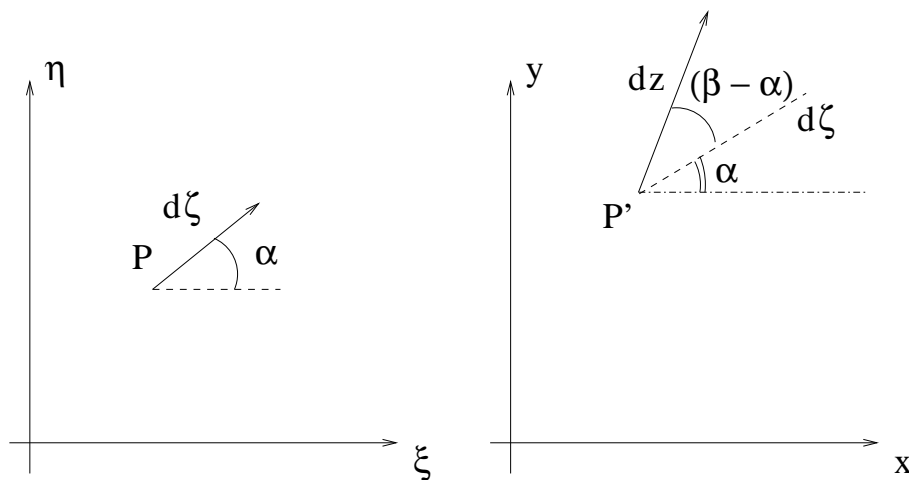


Figura 9.16

si ottiene quindi

$$\frac{dz}{d\zeta} = f'(\zeta) = \frac{|dz|}{|d\zeta|} e^{i(\beta - \alpha)}.$$

Si osservi che essendo $f'(\zeta)$ indipendente dalla direzione di $d\zeta$, tutti gli elementi lineari infinitesimi del fascio di centro P sono allungati, per effetto della trasformazione, della stessa quantità e ruotati dello stesso angolo. Di conseguenza, l'angolo formato da due qualsiasi curve PQ_1 e PQ_2 uscenti da un generico punto P del piano (x, y) (cioè l'angolo delle relative tangenti in P) è uguale all'angolo formato dalle corrispondenti curve $P'Q'_1$, $P'Q'_2$ del piano (ξ, η) nel punto P' corrispondente di P , purché la derivata $df/d\zeta$ non si annulli in P . Inoltre ciascuno degli elementi lineari infinitesimi del fascio di centro P corrisponde a un elemento lineare infinitesimo per P' tale che le relative lunghezze stanno in rapporto costante.

Le due affermazioni precedenti si enunciano usualmente osservando che si ha similitudine fra figure infinitesime corrispondenti dei due piani (si veda la fig. 9.17).

È il caso di sottolineare che la proprietà di similitudine non è estendibile a figure corrispondenti di dimensioni finite. Queste possono solo immaginarsi costituite da infinite figure infinitesime corrispondenti fra loro simili.

Le considerazioni precedenti presentano importanti conseguenze sulla teoria dei moti irrotazionali piani.

Sia infatti $W(z)$ il potenziale complesso di un moto irrotazionale in una certa regione del piano z e sia $z = f(\zeta)$ una funzione analitica della nuova variabi-

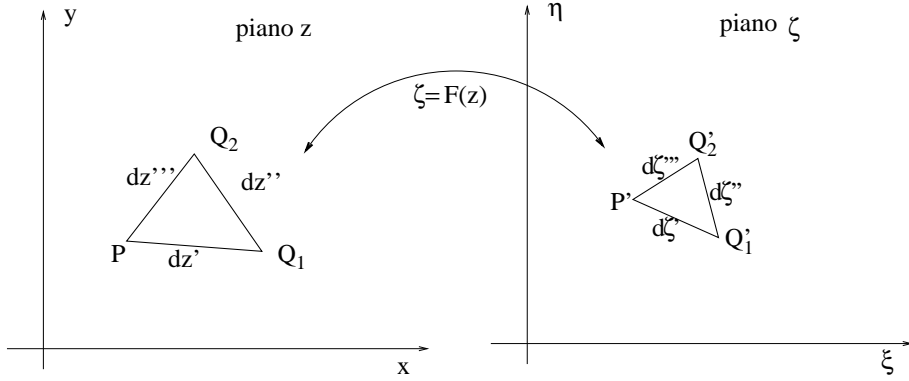


Figura 9.17

le complessa ζ . La funzione composta $W[f(\zeta)]$ può riguardarsi quale funzione analitica di ζ , cioè $W[f(\zeta)]$ è il potenziale complesso di un moto irrotazionale in una certa regione del piano ζ . Si dice anche che **il moto nel piano z è stato trasformato nel moto nel piano ζ** .

Le famiglie di linee equipotenziali e linee di corrente del piano z si trasformano nelle famiglie di linee equipotenziali e di corrente del piano ζ , mantenendosi fra loro ortogonali in ciascun punto eccetto che nei punti singolari della trasformazione.

La velocità complessa nel piano ζ si ottiene immediatamente nota la velocità nel piano z :

$$v_\xi - iv_\eta = \frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \frac{df}{d\zeta} \quad (9.80)$$

o

$$|\mathbf{v}|_{(\xi,\eta)} = |\mathbf{v}|_{(x,y)} \left| \frac{df}{d\zeta} \right| \quad (9.81)$$

In particolare si può osservare che i punti critici della trasformazione, in cui cioè si annulla la $df/d\zeta$, sono punti di ristagno nel piano ζ . Tuttavia i punti di ristagno nel piano ζ non necessariamente corrispondono a punti di ristagno nel piano z .

Inoltre singolarità (sorgenti o vortici) presenti nel piano z si trasformano in corrispondenti singolarità del piano ζ , caratterizzate da uguali intensità.

L'utilità del metodo delle trasformazioni conformi nello studio dei moti irrotazionali, consiste nella possibilità di trasformare un campo di moto non noto in uno di più agevole determinazione semplicemente trasformando la frontiera del campo di moto in una più semplice.

Tale tecnica rende significative e utili soluzioni relative a moti irrotazionali fisicamente non rappresentative di moti reali, quale il moto dovuto a una distribuzione uniforme di velocità che investe un cilindro circolare che verrà presentato nel seguito. La presenza del fenomeno della separazione dello strato limite implica infatti la non significatività della soluzione di moto irrotazionale. Quest'ultima può tuttavia essere utilizzata quale passo intermedio di una sequenza di trasformazioni che conducono al moto intorno a corpi affusolati in cui il fenomeno della separazione risulta assente.

La trasformazione $\zeta = z^n$

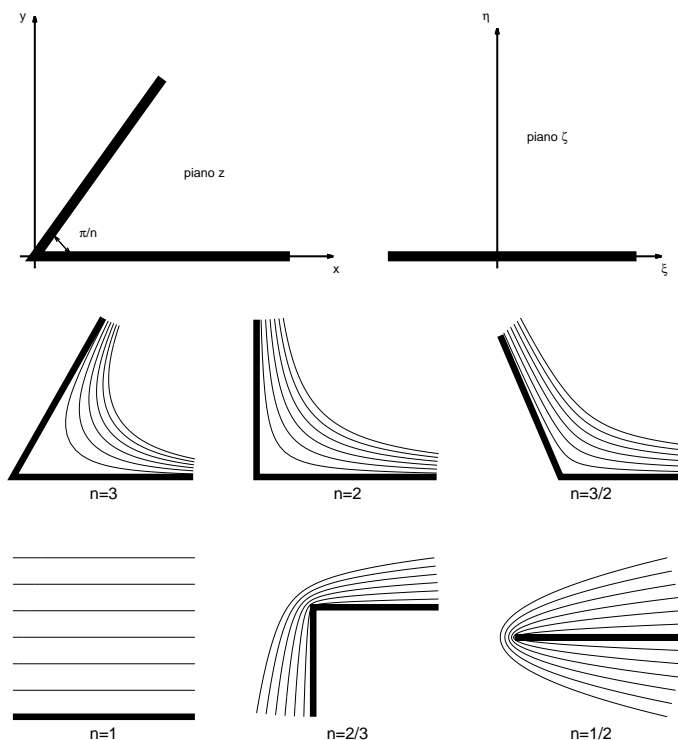


Figura 9.18

Esaminiamo un semplice ma importante esempio di trasformazione, che conduce dalla regione del piano z delimitata da due pareti piane intersecantisi con un

angolo π/n al semipiano $\eta > 0$ del piano ζ (figura 9.18). Essa si scrive

$$\zeta = z^n \quad (9.82)$$

L'unico possibile moto irrotazionale, nel semipiano superiore del piano ζ , privo di singolarità (se non dovute al punto singolare della trasformazione $\zeta = 0$) è quello uniforme e parallelo alla parete $\eta = 0$. Questo è descritto dal potenziale complesso

$$W = A\zeta \quad (9.83)$$

con A costante reale. Il moto nel piano z è dunque caratterizzato dal potenziale complesso

$$W = Az^n \quad (9.84)$$

o, riferendosi a coordinate cilindriche

$$\phi = Ar^n \cos n\theta \quad \psi = Ar^n \sin n\theta \quad (9.85)$$

Per $n > 1$ le pareti delimitano un angolo inferiore a π (si veda la figura 9.18).

In particolare, per $n = 2$ si ha il moto nella regione compresa fra i lati di un angolo retto e le linee di corrente sono rappresentate da iperboli equilateri. Inoltre tale moto rappresenta, se associato al suo simmetrico rispetto all'asse y , il moto irrotazionale intorno a un punto di ristagno, qui costituito dall'origine.

Per $n = 1/2$ si ha il moto intorno a una piastra piana molto sottile. Per $n = 2/3$ si ha infine il moto esterno a uno spigolo retto.

È di interesse osservare che:

- i) il moto nelle vicinanze del punto singolare della trasformazione muta distintamente carattere quando n passa attraverso il valore unitario. Si ha infatti:

$$|v| = \left| \frac{dW}{dz} \right| = |nA|r^{n-1}$$

donde, per $r \rightarrow 0$

$$|v| \rightarrow 0 \quad n > 1$$

$$|v| \rightarrow |A| \quad n = 1$$

$$|v| \rightarrow \infty \quad n < 1$$

Quindi se $n > 1$ il moto è soggetto a una decelerazione spaziale a monte del punto singolare mentre se $n < 1$ la decelerazione spaziale ha luogo immediatamente a valle della singolarità. Nel caso di un fluido reale in cui il numero di Reynolds abbia valori elevati si osserverà quindi la separazione dello strato limite dalla parete a monte della singolarità se $n > 1$ e a valle se $n < 1$.

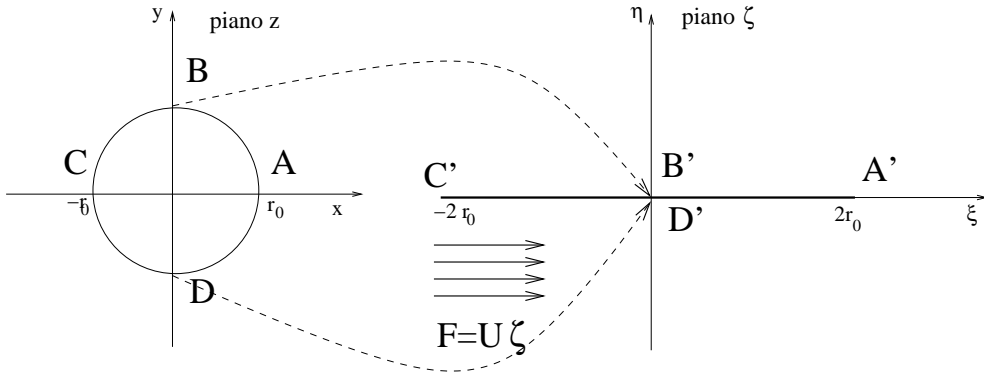


Figura 9.19

- ii) la generale validità dei campi di moto discussi è accresciuta dal fatto che essi si presentano in un intorno del punto di intersezione fra due pareti rigide impermeabili indipendentemente dalla struttura del campo di moto nella restante regione. Dunque, la velocità in corrispondenza del punto di discontinuità della tangente a una parete rigida risulta nulla se l'angolo nella regione occupata dal fluido risulta inferiore a π , ed è infinita se l'angolo è superiore a π .

La trasformazione di Joukowski

Si consideri ora la trasformazione

$$\zeta = z + \frac{r_0^2}{z} \quad (9.86)$$

dove r_0 è una variabile reale. La figura 9.19 mostra che la regione del piano z esterna alla circonferenza di equazione $z = r_0$ è trasformata nell'intero piano ζ dalla (9.86). Infatti sostituendo $z = r_0 \exp(i\theta)$ nella (9.86) si ottengono i punti nel piano ζ :

$$\zeta = r_0 \exp(i\theta) + r_0 \exp(-i\theta) = 2r_0 \cos \theta.$$

che corrispondono a quelli sulla circonferenza nel piano z . Punti esterni alla circonferenza vengono trasformati nel piano ζ in modo da coprire l'intero piano. Si noti che anche i punti interni alla circonferenza vengono trasformati in punti esterni alla figura nel piano ζ . Ad esempio il punto $z = 0$ viene trasformato nel punto all'infinito ($\zeta = \infty$). Interpretando ora la circonferenza nel piano z come la sezione di un cilindro di asse ortogonale al piano z , la superficie di questo viene trasformata dalla (9.86) in una piastra di spessore nullo compresa tra i punti A' e C' nel piano ζ . Si consideri ora il potenziale complesso del moto uniforme in

direzione ξ nel piano ζ (si veda figura 9.19):

$$W(\zeta) = U\zeta$$

La trasformazione conforme (9.86) consente di ottenere il corrispondente potenziale complesso nel piano z :

$$W(f(z)) = U \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right).$$

Si osservi che la tecnica della trasformazione conforme ha quindi consentito il calcolo del potenziale complesso e dunque del campo di velocità irrotazionale attorno a un cilindro nel piano z sulla base della sola conoscenza del campo di moto irrotazionale e uniforme nel piano trasformato ζ .

9.4.3 I profili alari portanti - profili di Joukowski

I profili alari sono utilizzati per il sostentamento di corpi in moto nei fluidi. Le loro caratteristiche principali debbono dunque essere:

- i) capacità di dar luogo a un moto del fluido cui corrisponde una significativa portanza;
- ii) capacità di ridurre al minimo la resistenza

Ciò è possibile se il moto è ovunque irrotazionale salvo che in sottili strati (strato limite e scia a valle del corpo) e se si sviluppa una circolazione nel moto intorno al corpo.

Vedremo nel cap.10 che al fine di ridurre le resistenze occorre evitare che lo strato limite *si separi*, fenomeno che si realizza quando il moto irrotazionale in prossimità del corpo decelera apprezzabilmente. Per evitare il fenomeno della separazione è opportuno utilizzare profili alari sottili che terminino con una cuspidi, posti parallelamente alla direzione del moto.

Il teorema di Kutta-Joukowski, introdotto in precedenza, asserisce che affinché vi sia un'azione di sostentamento da parte del fluido sul profilo alare, è necessario che attorno al profilo si generi una circolazione Γ di segno opportuno.

Un'ipotesi aggiuntiva, l'ipotesi di Kutta, richiede che l'intensità della circolazione Γ sia tale da fare coincidere il punto di ristagno, posizionato nella parte posteriore del profilo, con la cuspidi presente nel bordo d'uscita. Ciò consente di calcolare la circolazione che si genera attorno a un profilo alare e, utilizzando il teorema di Kutta-Joukowski, la portanza del profilo alare stesso.

L'ipotesi di Kutta agli inizi dello sviluppo della teoria dei profili alari era suggerita come regola empirica. Tuttavia, come vedremo, la conoscenza attuale degli strati limite ne consente una giustificazione fisica di tipo qualitativo.

Lo studio dei profili alari bidimensionali era in auge nelle prime fasi di sviluppo dell'aeronautica. I metodi numerici oggi disponibili per determinare il moto intorno a profili qualsiasi ha ridotto la rilevanza pratica del procedimento. È tuttavia utile descrivere i principali risultati raggiunti per comprendere l'azione di sostentamento che un fluido in moto esercita sia su un profilo alare sia su un corpo qualsiasi.

Consideriamo la trasformazione di Joukowski introdotta in precedenza (9.86)

$$z = \zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta} \quad (9.87)$$

con λ parametro reale che ha le dimensioni di una lunghezza. Tale trasformazione presenta due punti singolari definiti dalle relazioni

$$\zeta = \pm\lambda \quad z = \pm 2\lambda \quad (9.88)$$

La trasformazione, che può riscriversi nella forma

$$z \mp 2\lambda = \frac{(\zeta \mp \lambda)^2}{\zeta}, \quad (9.89)$$

nell'intorno dei punti singolari è del tipo $(\zeta - \zeta_0) \propto (z - z_0)^{1/2}$. Ciascuno di tali punti, se fatto appartenere al profilo nel piano ζ , si trasforma in una cuspidine nel piano z . In altre parole la (9.87) può essere utilizzata per costruire profili dotati di bordo d'uscita a forma di cuspidine a partire da una circonferenza passante per uno dei due punti singolari, per es. $\zeta_1 = -\lambda$, mentre il bordo d'ingresso può mantenersi arrotondato se la circonferenza non passa anche per il secondo punto singolare $\zeta_2 = \lambda$.

Esaminiamo dunque l'effetto della trasformazione (9.87) su una regione del piano ζ delimitata da una circonferenza. È opportuno considerare diversi casi

i) *Circonferenza di raggio λ con centro nell'origine*

L'equazione della circonferenza è $\zeta = \lambda e^{i\theta}$ che, nel piano trasformato, diventa $z = 2\lambda \cos \theta$ cioè il segmento A'B' dell'asse reale del piano z di figura 9.20.

ii) *Circonferenza di raggio $a > \lambda$ con centro sull'asse reale (fig. 9.21)*

Il profilo che si ottiene in questo caso è un profilo dotato di spessore crescente al crescere di $(a - \lambda)$.

È possibile, ipotizzando $\frac{a-\lambda}{\lambda} \ll 1$, ricavare lo spessore massimo del profilo:

$$s \simeq 3\sqrt{3}(a - \lambda) \quad (9.90)$$

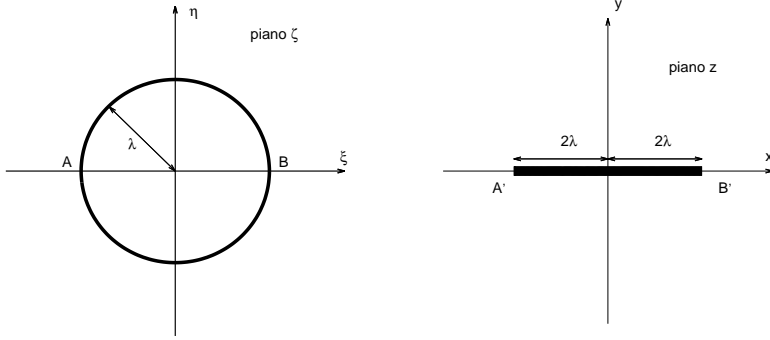


Figura 9.20

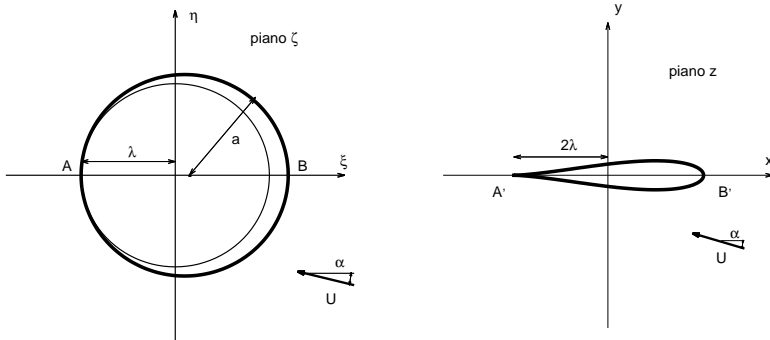


Figura 9.21

che si realizza all'incirca a una distanza di circa $1/4$ della corda dal bordo d'ingresso.

iii) *Circonferenza di raggio $a > \lambda$ con centro sull'asse immaginario*

Sia $(\lambda \tan \beta)$ l'ordinata del centro della circonferenza. Osservando che $\lambda = a \cos \beta$ e $\lambda \tan \beta = a \sin \beta$ è possibile calcolare la posizione dei punti trasformati di A, B, C e D di figura 9.22.

$$\begin{aligned}
 \zeta|_C &= i(a + \lambda \tan \beta) & z|_{C'} &= i(2a \sin \beta) \\
 \zeta|_D &= -i(a - \lambda \tan \beta) & z|_{D'} &= i(2a \sin \beta) \\
 \zeta|_A &= a \cos \beta = \lambda & z|_{A'} &= 2\lambda \\
 \zeta|_B &= -\lambda & z|_{B'} &= -2\lambda
 \end{aligned} \tag{9.91}$$

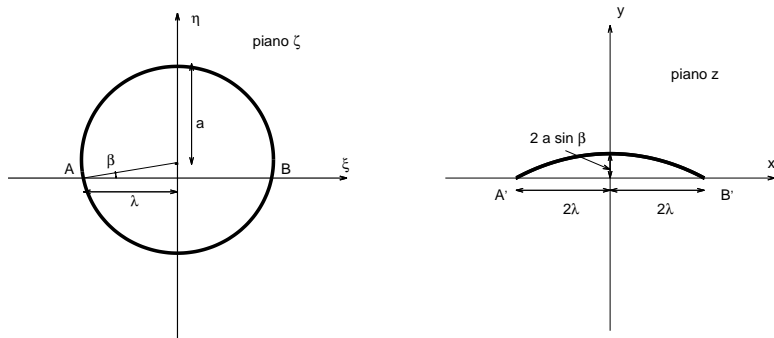


Figura 9.22

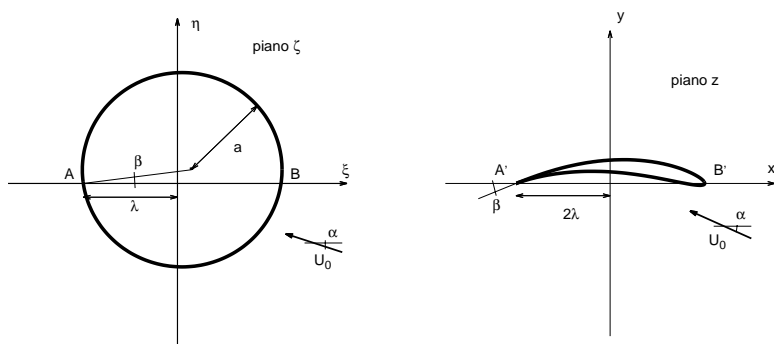


Figura 9.23

La circonferenza del piano ζ si trasforma quindi in un arco di circonferenza.

iv) *Circonferenza di raggio $a > \lambda$ con centro nel primo quadrante*

Si ottiene in tal caso un profilo dotato di spessore e curvatura (figura 9.23) la cui forma è determinata dai parametri $(a - \lambda)/\lambda$ (che ne controlla lo spessore) e β (che ne controlla la curvatura).

La portanza del profilo risultato della trasformazione si calcola utilizzando la condizione di Kutta. Infatti al variare di Γ è possibile ottenere diversi campi di moto irrotazionali attorno al profilo le cui linee di corrente sono visualizzate in figura (9.24). La condizione di Kutta, che afferma che il fluido deve abbandonare il profilo in modo che non vi siano discontinuità nel campo di moto, consente di escludere i casi (a) e (c) e di concludere che l'unico valore accettabile per Γ è quello che corrisponde alla situazione (b), cioè quello per cui il punto di ristagno

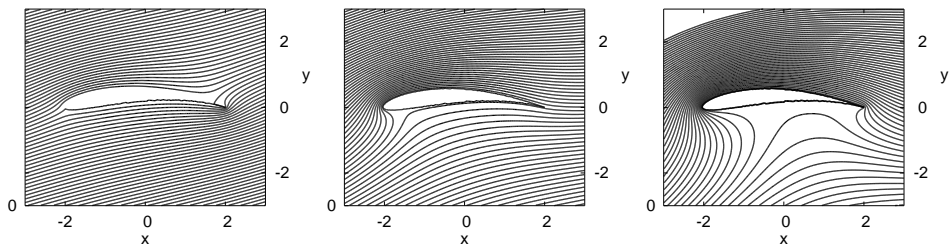


Figura 9.24

posteriore coincide con la cuspidè.

Nella presente trattazione, il problema è stato semplificato trascurando gli effetti della viscosità. Tuttavia la (9.15) consente di mettere in relazione la circolazione Γ attorno al profilo con l'integrale della vorticità presente negli strati limite attorno al profilo (una scia bidimensionale non ha vorticità netta). È evidente quindi che la circolazione attorno al profilo è legata alla presenza di effetti viscosi dentro lo strato limite. Per alti valori del numero di Reynolds, quando sulla superficie del profilo si genera uno strato limite, l'effetto della viscosità sul moto irrotazionale esterno viene quindi espresso dalla condizione di Kutta. Per questo motivo si può dire che la condizione di Kutta rappresenta l'effetto della viscosità. Indicando con α l'angolo formato dall'asse delle ascisse e dalla direzione del moto uniforme U_0 che investe il profilo alare (figura 9.23), sulla base della (9.40) si può concludere che affinché il punto $(-\lambda, 0)$ coincida con il punto di ristagno sulla superficie del cilindro è necessario che attorno al cilindro sia presente una circolazione

$$\Gamma = 4\pi U_0 a \sin(\alpha + \beta) \quad (9.92)$$

La portanza per unità di profondità è dunque

$$P = 4\pi \rho U_0^2 a \sin(\alpha + \beta). \quad (9.93)$$

Per comprendere il meccanismo di generazione della circolazione attorno al profilo e quindi della portanza si consideri un profilo alare con bordo di attacco arrotondato e bordo di uscita che possa essere approssimato con una cuspidè. Si immagini che il profilo si metta in moto raggiungendo istantaneamente la condizione di moto stazionario. Immediatamente dopo l'inizio del moto, il moto del fluido è ovunque irrotazionale poiché il trasporto della vorticità in direzione ortogonale alla superficie del profilo, che avviene dapprima a causa degli effetti viscosi e quindi per opera degli effetti convettivi, avviene su scale temporali finite. Il campo di moto iniziale oltre che essere irrotazionale è anche caratterizzato da un valore nullo della circolazione attorno al profilo. Infatti il teorema di Kelvin,

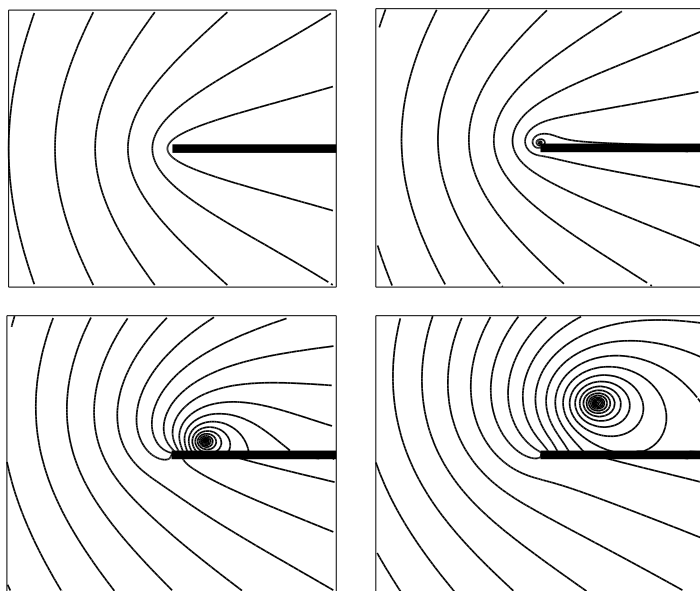


Figura 9.25: Linee di corrente attorno al bordo di uscita di una piastra piana in diverse fasi dopo l'inizio del moto. (a) moto irrotazionale, (b),(c) e (d) moto irrotazionale modificato dalla presenza di uno strato vorticoso a forma di spirale (linea tratteggiata) costituito dalla vorticità emessa dalle due superfici della piastra.

che asserisce che in un fluido incomprimibile, ideale e soggetto a un campo di forze conservativo la circolazione attorno a una qualsiasi curva materiale si mantiene costante, consente di stabilire che la circolazione si mantiene nulla. Infatti prima dell'inizio del moto, la circolazione attorno al profilo era nulla. Il punto di ristagno posteriore in questa prima fase sarà quindi collocato sulla superficie del profilo in una posizione che dipende dall'orientamento del profilo rispetto alla direzione di avanzamento. In generale quindi, nella prima fase, la posizione del punto di ristagno posteriore non coincide con il bordo di uscita. Di conseguenza, localmente, il moto attorno al bordo di uscita posteriore, assimilabile con una cuspidi, può essere calcolato come mostrato nel paragrafo (9.4.2) considerando $n = 1/2$. Poiché in corrispondenza della cuspidi la velocità irrotazionale assume valori infiniti, la decelerazione che si realizza immediatamente a valle causa la separazione dello strato limite in corrispondenza dello spigolo. Nella seconda fase, la vorticità emessa dal bordo di uscita influenza il moto irrotazionale nelle immediate vicinanze (figura 9.25). Nella terza fase la vorticità emessa dal bordo di uscita viene trascinata a valle, lontano dal profilo. Il segno della vorticità trascinata lontano corrisponde al senso di rotazione del moto attorno al bordo di uscita nei primi istanti di moto irrotazionale (oraria in figura 9.25), ed è evidente

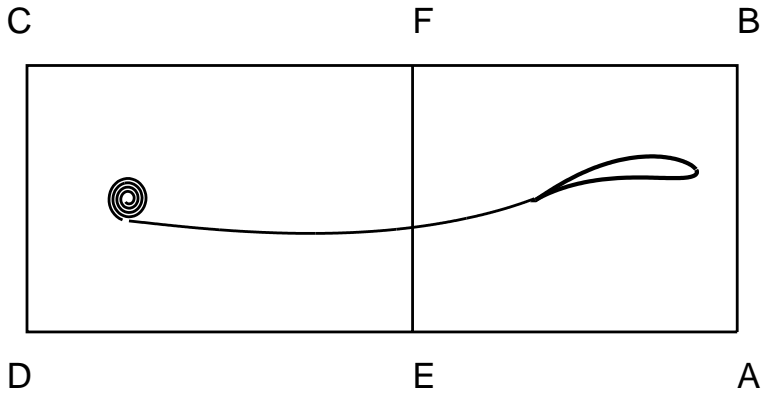


Figura 9.26

che una circolazione con la stessa intensità e segno opposto deve essere presente attorno al profilo. Infatti, si consideri la curva materiale $ABCD$ in figura 9.26 che racchiude sia la posizione iniziale del profilo (che corrisponde grosso modo alla posizione del vortice emesso dalla cuspidè) sia la sua posizione attuale. La circolazione attorno ad $ABDC$ era zero all'istante iniziale e quindi si mantiene nulla. Segue che la circolazione attorno alla curva $ABFE$ deve essere uguale e contraria a quella attraverso la curva $EFCD$ cioè al flusso di vorticità attraverso l'area delimitata dalla curva $EFCD$, che racchiude praticamente tutta la vorticità emessa dal profilo fino all'istante considerato. Il fluido contenuto in $ABFE$ è in moto irrotazionale (tranne per il sottile strato limite e per la scia che in moto stazionario contiene un flusso di vorticità netto nullo) e quindi la circolazione attorno a $ABFE$ coincide con quella attorno al profilo. Il meccanismo illustrato spiega la generazione della circolazione attorno al profilo che risulta avere segno opposto a quella che si genera nel campo di moto irrotazionale attorno al bordo di uscita nei primi istanti del moto. La figura 9.27 mostra una visualizzazione sperimentale delle linee di corrente attorno a un profilo alare nei primi istanti del suo moto.

9.4.4 Moto irrotazionale attorno a un corpo bidimensionale di forma arbitraria

Si consideri una piastra piana di lunghezza ℓ investita da un moto uniforme con direzione individuata dall'angolo α (si veda la figura 9.28). Sulla base di quanto esposto in precedenza, il campo di moto irrotazionale può essere calcolato utilizzando la trasformazione di Joukowski e la condizione di Kutta che consentono di stabilire che, detta $|\Gamma|$ la circolazione attorno alla piastra, deve

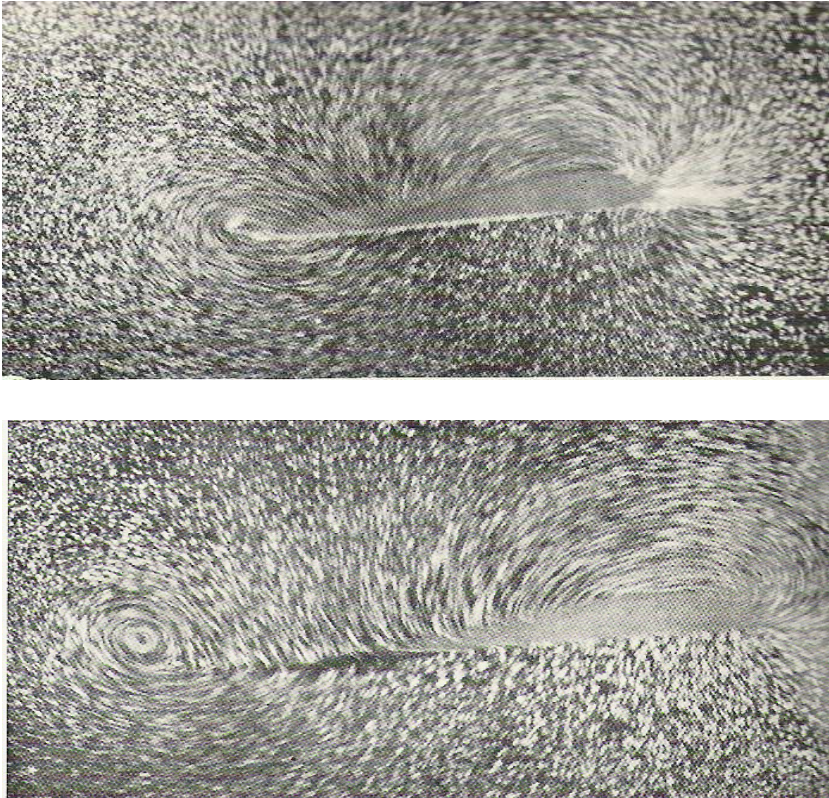


Figura 9.27: Linee di corrente del campo di moto attorno a un profilo alare, rispetto al fluido in quiete: (a) in un istante immediatamente successivo all'inizio del moto del profilo (da sinistra verso destra), (b) dopo che il profilo si è spostato a una distanza pari alla sua lunghezza. La vorticità emessa è concentrata in un vortice. (Foto di Prandtl e Tietjens, 1934)

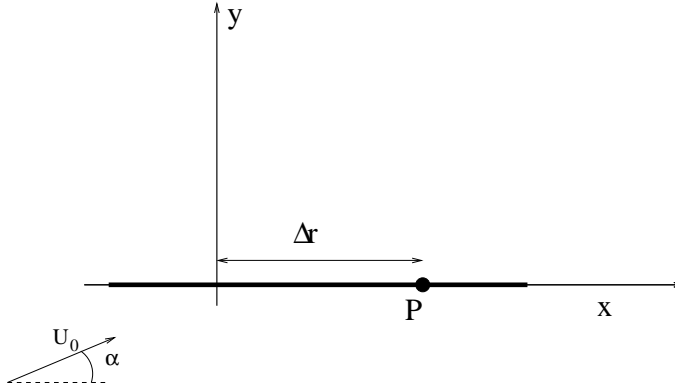


Figura 9.28

risultare

$$|\Gamma| = \pi \ell U_0 \sin \alpha \quad (9.94)$$

con circolazione oraria. Si immagini di sostituire la piastra con un vortice, posizionato nell'origine, di intensità $-|\Gamma|$ (rotazione oraria). La componente verticale della velocità indotta dal vortice nel punto P di coordinate $(\Delta r, 0)$ è $-|\Gamma|/2\pi(\Delta r)$. Sovrapponendo un moto uniforme come in figura 9.28 è possibile determinare la posizione Δr di un punto sulla superficie della piastra, detto punto di collocazione, in cui la componente verticale della velocità si annulla

$$U_0 \sin \alpha - \frac{|\Gamma|}{2\pi \Delta r} = 0. \quad (9.95)$$

La relazione (9.95), insieme alla (9.94), fissa $\Delta r = \ell/2$. Inoltre, sapendo che la distribuzione della pressione su una piastra è tale che il centro di spinta è posizionato a $\ell/4$ dal bordo di attacco della piastra, è possibile rappresentare la piastra piana con un vortice posizionato a $\ell/4$ dal bordo di attacco e un punto di collocazione a $3/4\ell$.

Volendo calcolare il moto irrotazione attorno a un corpo bidimensionale di forma arbitraria sarà sufficiente approssimare la superficie del corpo come una successione di piastre piane le quali saranno rappresentate da un vortice, di intensità opportuna e da un punto di collocazione dove la velocità normale si annulla.

Per chiarezza riportiamo un esempio che può essere sviluppato senza l'aiuto di un computer. Si consideri la piastra di figura 9.29 e si immagini di scomporla in tre piastre più piccole ciascuna delle quali è schematizzata con un vortice e un punto di collocazione. Si denoti la posizione dei vortici, rispetto a un sistema di assi con l'origine coincidente con il bordo d'attacco della piastra, con x_{01}, x_{02}, x_{03} pari a $\frac{1}{12}\ell, \frac{5}{12}\ell, \frac{3}{4}\ell$ rispettivamente e quella dei punti di collocamento con x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}

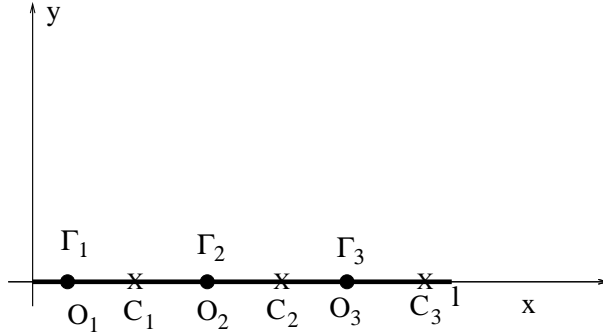


Figura 9.29

pari a $\frac{1}{4}\ell$, $\frac{7}{12}\ell$, $\frac{11}{12}\ell$ rispettivamente con $y = 0$ per tutti i punti. Si ricordi che un vortice di intensità Γ posto in x_0, y_0 induce nella posizione x, y la velocità:

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} ; v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (9.96)$$

È quindi possibile calcolare la componente verticale v della velocità nel punto x_{C1} , dovuta al moto uniforme e alla presenza dei tre vortici. L'annullarsi della componente v della velocità nel primo punto di collocazione fornisce dunque la relazione:

$$2\pi U_0 \sin \alpha - \frac{\Gamma_1}{x_{c1} - x_{01}} - \frac{\Gamma_2}{x_{c1} - x_{02}} - \frac{\Gamma_3}{x_{c1} - x_{03}} = 0 \quad (9.97)$$

imponendo l'annullarsi della v in tutti i punti di collocazione conduce al seguente sistema algebrico

$$6\Gamma_1 - 6\Gamma_2 - 2\Gamma_3 = 2\pi U_0 \ell \sin \alpha \quad (9.98)$$

$$2\Gamma_1 + 6\Gamma_2 - 6\Gamma_3 = 2\pi U_0 \ell \sin \alpha \quad (9.99)$$

$$\frac{6}{5}\Gamma_1 + 2\Gamma_2 + 6\Gamma_3 = 2\pi U_0 \ell \sin \alpha \quad (9.100)$$

la cui soluzione

$$\Gamma_1 = \frac{5}{8}\pi U_0 \ell \sin \alpha \quad \Gamma_2 = \frac{1}{4}\pi U_0 \ell \sin \alpha \quad \Gamma_3 = \frac{1}{8}\pi U_0 \ell \sin \alpha \quad (9.101)$$

fornisce i valori della circolazione dei tre vortici. È interessante osservare che $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ coincide con il valore (9.94) della circolazione già calcolata attorno a un'unica piastra.

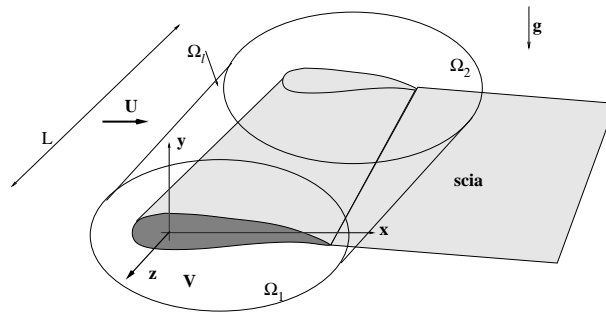


Figura 9.30

9.5 Moti irrotazionali tridimensionali

Lo studio dei moti irrotazionali tridimensionali non può essere affrontato con le tecniche mostrate nel paragrafo 9.4, che si applicano solo ai campi di moto bidimensionali. Per lo studio dei moti irrotazionali tridimensionali si deve fare riferimento alla formulazione generale dello studio dei moti irrotazionali, esposta nel paragrafo 9.2.

Tuttavia anche se lo studio dei moti irrotazionali tridimensionali risulta matematicamente più complesso rispetto a quello dei moti bidimensionali, molti risultati esposti e derivati per moti bidimensionali restano validi anche per moti tridimensionali. Ad esempio il paradosso di D'Alembert esposto nel paragrafo 9.2.2 è valido anche per i moti tridimensionali e consente quindi di stabilire che un corpo tridimensionale in moto stazionario e irrotazionale in un fluido incomprimibile e ideale non è soggetto ad alcuna forza da parte del fluido. Tuttavia esistono alcune differenze significative tra i moti bidimensionali e quelli tridimensionali. In particolare un corpo tridimensionale soggetto a portanza risulta anche soggetto a una forza di resistenza detta **resistenza indotta**

9.5.1 La resistenza indotta

La resistenza indotta verrà illustrata con riferimento al campo di moto in prossimità di un'ala di larghezza L che avanza con velocità costante U_0 in un fluido in quiete. In prima approssimazione il campo di moto attorno a ciascuna sezione dell'ala può essere considerato bidimensionale e quindi sono applicabili i risultati ottenuti in precedenza. In particolare, utilizzando il teorema di Kutta-Joukowski e indicata con $\Gamma(z)$ la circolazione attorno alla sezione del corpo individuata dalla

coordinata z , la portanza totale sul corpo risulta:

$$P = \rho U \int_0^L \Gamma(z) dz. \quad (9.102)$$

La (9.92) ha mostrato che la circolazione che si sviluppa attorno a un profilo portante è proporzionale alla lunghezza della corda del profilo stesso. Appare quindi evidente che se la lunghezza della corda del profilo diminuisce, diminuisce anche la circolazione che si genera attorno al profilo. Procedendo verso la punta dell'ala diminuisce dunque il valore dell'integrale della componente lungo z della vorticità.

Inoltre le (9.14-9.15) hanno consentito di stabilire una relazione tra la circolazione attorno al profilo alare e la vorticità presente sulla superficie del corpo.

Si consideri ora un volume di controllo (figura 9.30) che contiene un'ala tri-dimensionale ed è delimitato dalle due sezioni Ω_1 e Ω_2 tali che il profilo alare individuato sulla sezione Ω_1 abbia lunghezza (l_1) maggiore di quella (l_2) del profilo contenuto nella sezione Ω_2 .

Si osserva che, essendo la vorticità un campo solenoidale deve essere:

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV = 0 = \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Omega_\ell} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} d\Omega \quad (9.103)$$

dove Ω_ℓ indica la superficie laterale del volume V .

Osservando che

$$\int_{\Omega_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} d\Omega = \Gamma_1; \quad \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} d\Omega = -\Gamma_2$$

(si deve tener conto del segno della normale \mathbf{n} rispetto al versore dell'asse z) dove Γ_1 indica la circolazione attorno al profilo alare di lunghezza l_1 e Γ_2 la circolazione attorno al profilo di lunghezza l_2 , risulta:

$$-\Gamma_1 + \Gamma_2 = \int_{\Omega_\ell} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} d\Omega \quad (9.104)$$

Come visto in precedenza, $|\Gamma_1|$ è maggiore di $|\Gamma_2|$ (la corda dell'ala in corrispondenza della sezione Ω_1 è maggiore della corda dell'ala in corrispondenza della sezione Ω_2). Inoltre sia la circolazione attorno al profilo nel piano Ω_1 che quella attorno al profilo nel piano Ω_2 risultano negative, il valore a destra nella (9.104) risulta quindi positivo.

La vorticità presente sulla superficie laterale Ω_ℓ è non nulla solo in corrispondenza della sottile scia a valle del profilo, dunque nella scia deve essere $\omega_x > 0$.

È superfluo notare che, se la corda dell'ala invece di diminuire aumentasse considerando valori di z sempre più negativi, il valore di ω_x risulterebbe negativo (si veda la figura 9.31). Sulla base della (7.2), che lega le componenti della vorticità a quelle del tensore delle velocità di rotazione, si ottiene:

$$\Omega_{32} = \frac{\omega_1}{2}.$$

L'interpretazione fisica delle componenti del tensore delle velocità di rotazione, espressa in termini matematici dalla (1.49), consente poi di stabilire che all'estremità dell'ala esiste sempre un moto del fluido dalla parte inferiore dell'ala (dove la pressione è maggiore) verso la parte superiore dell'ala (dove sono presenti pressioni minori). Tale flusso è particolarmente intenso perché le variazioni della corda dell'ala in corrispondenza della sua estremità sono molto intense (si veda la figura 9.31). Poiché in corrispondenza del centro di un vortice la pressione

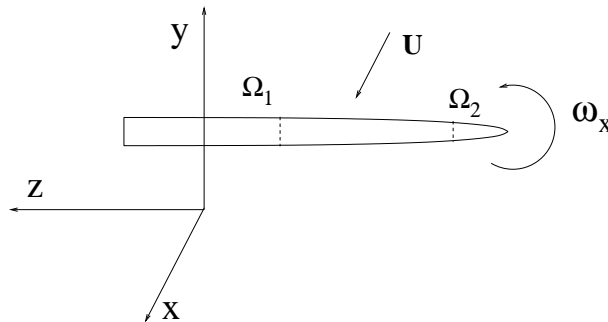


Figura 9.31

assume valori minimi, risulta evidente che la presenza di detto vortice genera una forza che si oppone all'avanzamento dell'ala. Tale forza, intrinsecamente legata agli effetti di tridimensionalità è detta **resistenza indotta**.

All'esterno delle due estremità delle ali i citati vortici generano una velocità ascensionale che può essere utilizzata per creare una forza di portanza su un oggetto che segue. Per questo motivo gli uccelli migratori tendono a disporsi secondo una formazione 'triangolare' in cui quelli che seguono sfruttano il lavoro di quelli che procedono per diminuire lo sforzo necessario a mantenersi in volo (figura 9.33).



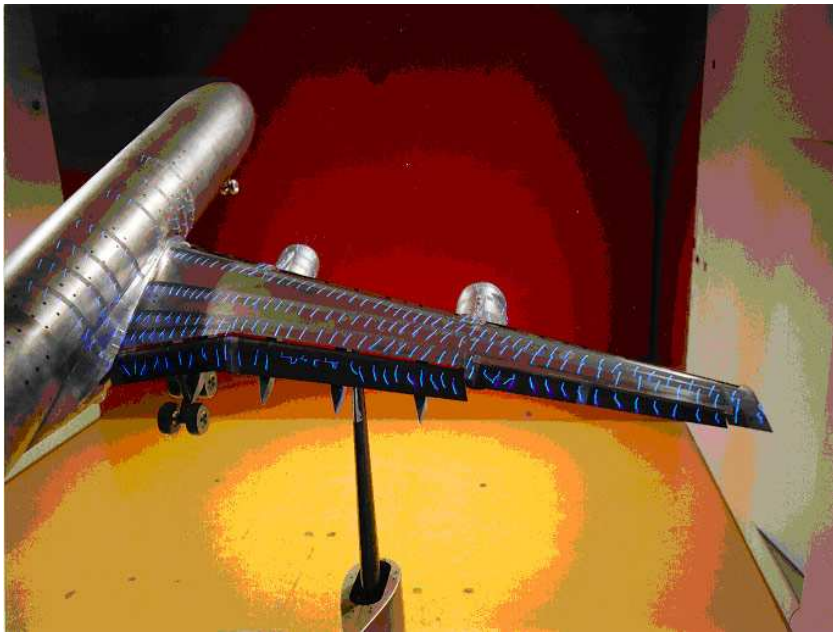
Figura 9.32: 'Tip vortex'. Foto del centro di ricerca NASA Langley Research Center (NASA-LaRC)



Figura 9.33: Oche canadesi in formazione a V (Madison, Wisconsin). Foto di John Benson.

MOTI AD ALTI NUMERI DI REYNOLDS: GLI EFFETTI DELLA VISCOSITÀ

Dove si studia lo strato limite



Visualizzazione del campo di moto sull'ala di un aereo con fili di lana. Immagine da <https://www.onera.fr/fr/windtunnel/flow-field-survey-and-visualization>

10.1 Lo strato limite

La nozione generale di **strato limite** è quella di 'strato entro il quale gli effetti viscosi sono importanti quanto gli effetti inerziali, comunque elevato sia il numero di Reynolds caratteristico del moto'.

Nella descrizione del moto intorno a un corpo che parte dallo stato di quiete (capitolo 7), si è osservato che il corpo stesso agisce quale sorgente di vorticità che è poi diffusa per effetto viscoso e trasportata verso valle per effetto convettivo (trascurando gli effetti della rotazione e deformazione delle linee di vorticità non rilevanti per gli scopi presenti). Al crescere del numero di Reynolds l'effetto convettivo prevale su quello diffusivo e la vorticità tende a restare confinata in vicinanza della superficie del corpo.

Tali considerazioni suggeriscono l'ipotesi, avanzata per la prima volta da Prandtl (1905), che gli effetti viscosi (tensioni viscosi, diffusione della vorticità, etc.) risultino significativi in strati adiacenti le pareti solide (o prossimi alle interfacce in generale), i cui spessori tendono a zero quando il numero di Reynolds del moto tende a infinito, mentre risultano trascurabili al di fuori di essi. Tale ipotesi, applicata a un gran numero di moti, non è mai stata dimostrata in modo rigoroso, ma ha trovato il conforto di ripetute osservazioni sperimentali e di numerose soluzioni particolari delle equazioni generali del moto. Essa non è tuttavia generalmente valida né è agevole formulare criteri generali per la sua validità. Si danno solo criteri pratici che verranno discussi nel prosieguo di questo capitolo.

Il ruolo dello strato limite è anche quello di conciliare il fatto intuitivo che gli effetti viscosi risultano trascurabili nella gran parte del campo di moto quando $\nu \rightarrow 0$ col fatto che la condizione di aderenza alla parete deve risultare soddisfatta per quanto piccolo sia ν . Lo strato limite è dunque anche lo strato in cui la velocità tangenziale passa dal valore imposto dalla condizione di aderenza alla parete al valore corrispondente (nel senso che verrà precisato nel seguito) al valore di moto ideale irrotazionale. Inoltre il paradosso di d'Alembert, illustrato nel cap. 8, mette in luce come un fluido in moto stazionario ideale e irrotazionale non sia in grado di esercitare una resistenza su un corpo, in palese contraddizione con l'esperienza. Lo schema di strato limite consente di superare tale paradosso e di calcolare la resistenza esercitata da un fluido su un corpo in moto.

Le definizioni precedenti pongono l'esigenza di definire in modo quantitativo lo **spessore dello strato limite**. Poiché il modo con cui la distribuzione della velocità nello strato tende a quella del moto a potenziale esterno è asintotico, la definizione dello 'spessore δ_0 dello strato' è necessariamente convenzionale. Usualmente si pone δ_0 pari alla distanza dalla parete alla quale la velocità tangenziale ha raggiunto un valore pari a $(0.99 U)$ essendo U la velocità del moto a potenziale esterno. Lo studio dei moti ad alti numeri di Reynolds è dunque af-

frontato calcolando dapprima il moto ideale irrotazionale che fornisce la velocità tangenziale e la distribuzione di pressione sulla superficie del corpo o delle pareti che delimitano il fluido. Successivamente si affronta lo studio dello strato limite utilizzando come condizioni sul bordo dello strato i valori della velocità e della pressione calcolati in precedenza.

Volendo affrontare un calcolo più accurato che tenga in conto che il contorno della regione di moto irrotazionale e ideale non è la superficie del corpo bensì il bordo dello strato limite si procede con un calcolo del moto irrotazionale di seconda approssimazione attorno a un corpo fittizio la cui superficie è spostata rispetto a quella reale del corpo di una quantità δ_1 detta **spessore di spostamento** dello strato limite. Lo spessore di spostamento δ_1 è definito come:

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (10.1)$$

e può interpretarsi quale 'misura dello spostamento subito dal moto a potenziale esterno per effetto della presenza dello strato limite' (y è un asse perpendicolare alla superficie del corpo). Il significato fisico di δ_1 è evidente se si nota che

$$U\delta_1 = \int_0^\infty (U - u) dy \quad (10.2)$$

La presenza dello strato limite fa sì che il fluido rallenti in prossimità del corpo e quindi una portata pari a $\int_0^\infty (U - u) dy$ non riesca più a defluire rispetto al caso irrotazionale (si veda la figura 10.2). Tale "deficit" di flusso può essere schematizzato assumendo che parte dello spazio sia occupato dal corpo e in particolare che il corpo aumenti di volume nella direzione ortogonale alla sua superficie spostandosi di una quantità pari a δ_1 tale che $U\delta_1 = \int_0^\infty (U - u) dy$. In modo analogo si definisce uno **spessore di quantità di moto** nella forma

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (10.3)$$

10.2 Equazioni dello strato limite piano

Si assume lo spessore dello strato piccolo rispetto alla distanza L parallela alla parete lungo la quale la velocità varia apprezzabilmente. Attraverso lo strato, la velocità passa dal valore zero di aderenza alla parete al valore caratteristico del moto di un fluido ideale. Il fatto che lo strato limite sia sottile rende possibili talune approssimazioni introdotte da Prandtl (1905) e illustrate nel seguito.

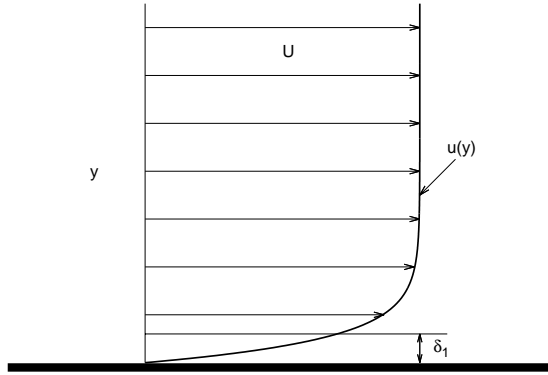


Figura 10.2

Per semplicità, si considera una parete rigida bidimensionale e liscia caratterizzata da un raggio di curvatura grande rispetto allo spessore dello strato. Il moto viene quindi assunto bidimensionale e nelle equazioni del moto si trascurano i termini legati alla curvatura del sistema di coordinate. Una derivazione più rigorosa porterebbe comunque alla conclusione che tali termini sono trascurabili.

Si denoti con U_0 un valore rappresentativo della componente u di velocità del moto ideale e con δ_0 una lunghezza rappresentativa dello spessore caratteristico dello strato con $\delta_0 \ll L$. Si ipotizzi infine che la scala temporale caratteristica del fenomeno sia L/U_0 .

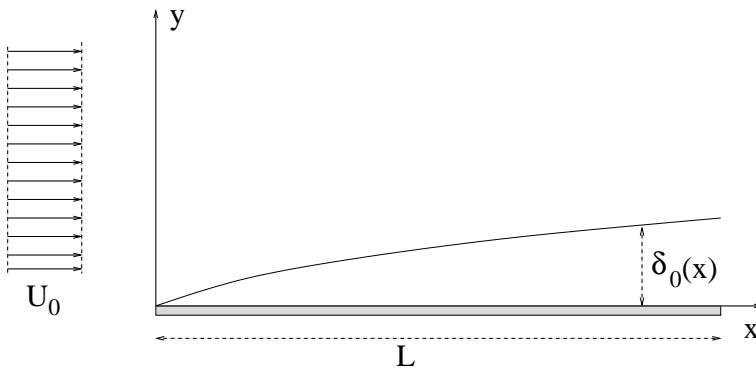


Figura 10.3

Introducendo un sistema di coordinate in cui la superficie $y = 0$ coincide con il corpo, l'asse y è normale al corpo e l'asse x segue il profilo del corpo (figura

10.3), l'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10.4)$$

impone allora che

$$v \sim O\left(\frac{\delta_0}{L} U_0\right) \quad (10.5)$$

cioè la componente di velocità ortogonale alla parete risulta assai più piccola della componente tangenziale. Infatti l'ordine di grandezza del termine $\frac{\partial u}{\partial x}$ risulta $\frac{U_0}{L}$. Tale termine deve avere lo stesso ordine di grandezza del termine $\frac{\partial v}{\partial y}$ che risulta essere $\frac{O(v)}{\delta_0}$. In caso contrario, la soluzione della (10.4), sotto le opportune condizioni al contorno, non sarebbe fisicamente significativa. Se infatti $O(v)/\delta_0$ risultasse molto più grande di U_0/L , l'equazione di continuità porgerebbe $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ cioè v dovrebbe essere indipendente da y . Considerato che v deve annullarsi, per $y = 0$, v risulterebbe identicamente nulla e ciò sarebbe in palese contraddizione con l'ipotesi fatta sull'ordine di grandezza di v . In modo analogo, se $O(v)/\delta_0$ risultasse molto più piccolo di U_0/L , seguirebbe $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e quindi u identicamente uguale a U_0 , nuovamente in contraddizione con l'ipotizzata presenza dello strato limite che comporta variazione di U con x . Segue dunque la (10.5).

Nella componente secondo x dell'equazione di Navier-Stokes è immediato inoltre verificare che

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|. \quad (10.6)$$

Infatti:

$$O\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{U_0}{L^2} \quad \text{e} \quad O\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{U_0}{\delta_0^2}.$$

$$\text{Inoltre } O\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) = O\left(v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{U_0^2}{L}.$$

Infine la condizione che il generico termine inerziale (ad es. $u \partial u / \partial x$) sia dello stesso ordine di grandezza del termine viscoso significativo ($\nu \partial^2 u / \partial y^2$) conduce al risultato

$$\frac{U_0^2}{L} \sim \frac{\nu U_0}{\delta^2} \Rightarrow \frac{\delta_0}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad \text{per } Re \rightarrow \infty \quad (10.7)$$

dove $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$.

La componente secondo x dell'equazione di Navier-Stokes si riduce allora alla forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_m}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (10.8)$$

La (10.8) presenta, rispetto all'equazione che governa l'evoluzione dei moti irrotazionali, l'ulteriore contributo del termine associato agli effetti diffusivi $\nu \partial^2 u / \partial y^2$. Si noti che nella (10.8) è stata introdotta la pressione modificata p_m che risulta legata alla pressione p dalla relazione:

$$p_m = p + \rho g z.$$

avendo assunto che l'accelerazione di gravità g sia diretta lungo l'asse z e abbia verso opposto. L'ordine di grandezza della pressione modificata p_m è assunto uguale a quello della pressione modificata sul bordo dello strato che, sulla base del teorema di Bernoulli, risulta pari a ρU_0^2 .

L'equazione di Navier-Stokes nella direzione y , considerate le scale adottate in precedenza e stimando l'ordine di grandezza della pressione dentro lo strato limite pari a ρU_0^2 (ordine di grandezza della pressione del moto irrotazionale esterno sul bordo dello strato), conduce al risultato:

$$\frac{\partial p_m}{\partial y} = 0. \quad (10.9)$$

In altre parole la pressione (depurata dal contributo idrostatico) non varia apprezzabilmente entro lo strato nella direzione ortogonale alla parete. Infatti è facile verificare che $O\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{U_0^2}{\delta}$ risulta molto maggiore dell'ordine di qualunque altro termine dell'equazione del moto proiettata nella direzione y . I termini convettivi risultano infatti di ordine $\frac{\delta U_0^2}{L^2}$ mentre il maggiore dei termini diffusivi è di ordine $\frac{\nu U_0}{L \delta}$ che è pari a $\frac{\delta U_0^2}{L^2}$, considerando il legame tra il numero di Reynolds e il rapporto $\frac{\delta}{L}$. Se dunque la variazione di p_m con x è nota (per es. dallo studio del moto ideale esterno allo strato o da risultati sperimentali) il termine in $\partial p_m / \partial x$ nella (10.8) può assumersi come dato.

Le (10.4), (10.8), (10.9) costituiscono le **equazioni semplificate dello strato limite**. Le condizioni al contorno da associare alle (10.4) e (10.8) sono

$$u = v = 0 \quad \text{per } y = 0 \quad (10.10)$$

$$u(x, y, t) \rightarrow U(x, t) \quad \text{per } \frac{y}{\delta_0} \rightarrow \infty \quad (10.11)$$

dove si è indicata con U la velocità del moto a potenziale esterna allo strato e il limite $y/\delta_0 \rightarrow \infty$ denota il bordo dello strato (per il momento non 'precisato' esattamente).

Ma per il moto irrotazionale esterno, nelle immediate vicinanze della parete (dove V è piccolo e risulta trascurabile il termine $V \partial U / \partial y$) vige la:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_m}{\partial x}. \quad (10.12)$$

Ulteriore condizione da imporre è la conoscenza della distribuzione della velocità in una sezione dello strato e, se il moto è non stazionario, della distribuzione spaziale di u all'istante iniziale.

Osserviamo infine che strati limite non si formano solo in prossimità di pareti rigide. Può affermarsi in generale che tali strati si formano in prossimità di qualsiasi superficie lungo la quale debbano essere soddisfatte condizioni fisiche che non sono verificate dalla soluzione delle equazioni ideali. Dunque strati limite si formano in prossimità di interfacce fra due fluidi dove deve risultare soddisfatta la condizione di continuità delle tensioni tangenziali (anzichè quella di aderenza). Strati limite (cosiddetti 'liberi') possono essere considerati anche getti e scie quando, essendo elevato il numero di Reynolds, la vorticità generata a monte è soggetta a convezione in misura prevalente rispetto alla diffusione.

La formulazione precedente è valida solo se il moto si mantiene **laminare** e lontano dal bordo d'ingresso dove $R_x \sim O(1)$ cioè $x \sim O(\nu/U)$. Quando il numero di Reynolds ($\delta_1 U_0/\nu$) eccede circa 600, o equivalentemente il numero di Reynolds definito come Ux/ν eccede circa 5×10^5 , il moto laminare diventa instabile, cioè i disturbi sempre presenti nel moto, si amplificano e danno luogo più a valle a una configurazione di moto nuova detta 'turbolenta' caratterizzata da forte irregolarità. Lo studio dei moti turbolenti sarà oggetto del capitolo 11

10.2.1 Formulazione integrale di V. Kàrmàn

Le tensioni tangenziali sono connesse alla distribuzione dello spessore dello strato attraverso una relazione che rappresenta il bilancio della quantità di moto entro una porzione infinitesima dello strato, tale equazione è detta anche 'equazione dello strato limite in forma integrale'. L'equazione della quantità di moto in forma integrale si ottiene semplicemente integrando rispetto a y le equazioni differenziali dello strato limite (10.4) e (10.8) riscritte nella forma

$$0 = (U - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (U - u) \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (10.13)$$

$$-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial t}(U - u) + U \frac{\partial U}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (10.14)$$

Sommando membro a membro segue:

$$-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial t}(U - u) + \frac{\partial}{\partial x}[u(U - u)] + (U - u) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}[v(U - u)] \quad (10.15)$$

essendo $\partial U / \partial y = 0$ entro lo strato. Integrando la relazione precedente fra 0 e ∞ e osservando che $\partial u / \partial y \rightarrow 0$ e $v(U - u) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow \infty$ segue

$$\begin{aligned} \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty (U - u) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u(U - u) dy + \\ &+ \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\infty (U - u) dy. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Utilizzando le definizioni, introdotte in precedenza, di ‘spessore di spostamento’ δ_1 dello strato e quella di ‘spessore di quantità di moto’ δ_2 la (10.16) diventa:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\partial(U\delta_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\delta_2 U^2)}{\partial x} + \delta_1 U \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (10.17)$$

La (10.17) è stata originariamente dedotta da Kàrmàn (1921) sulla base di un bilancio di quantità di moto. La derivazione qui riportata è dovuta a Polhausen (1921). Si sottolinea che una derivazione facile da comprendere dal punto di vista fisico è riportata nel seguito per un moto irrotazionale esterno (U) che non varia né nel tempo né nella direzione x .

10.3 Strato limite stazionario su piastra piana

10.3.1 Soluzione basata sulla formulazione integrale

Se si considera lo strato limite su una piastra piana investita da un moto irrotazionale stazionario e uniforme (U non cambia con x), la (10.17) diviene:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = U^2 \frac{\partial \delta_2}{\partial x} = U^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy. \quad (10.18)$$

Alla (10.18) si può anche pervenire applicando il principio della quantità di moto al volume di controllo a forma di parallelepipedo, di larghezza unitaria, appoggiato alla parete e mostrato in figura 10.4.

Si consideri infatti il volume tratteggiato in figura 10.4 e si applichi il principio della quantità di moto lungo la direzione x :

$$M_{ux} - M_{ix} = \Pi_x$$

dove

$$M_{ix} = \rho \int_0^\delta U^2 dy$$

è il flusso di quantità di moto che entra nel volume di controllo in direzione x ,

$$M_{ux} = \rho \int_0^\delta u^2 dy + \rho \int_0^\delta U(U - u) dy$$

è il flusso di quantità di moto che esce dal volume di controllo in direzione x e

$$\Pi_x = \int_{AD} p_0 dy + \int_{BC} t_x dy - \int_{AB} \tau_0 dx$$

è la risultante delle forze di superficie che agiscono sul volume di controllo (τ_0 indica la componente nella direzione x della tensione che agisce sulla piastra). Si può verificare facilmente che la parte viscosa della componente della tensione che agisce sulla superficie CB in direzione x è trascurabile rispetto alla parte dovuta alla pressione. Si ricordi che, per quanto esposto in precedenza, la pressione sulla superficie CB risulta pari al valore imposto dal moto irrotazionale esterno sul bordo dello strato. Emerge quindi che

$$\Pi_x = - \int_{AB} \tau_0 dx$$

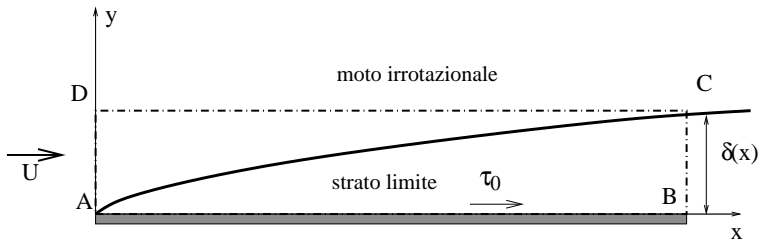


Figura 10.4: Volume di controllo per l'applicazione del principio della quantità di moto

L'applicazione del principio della quantità di moto lungo la direzione x conduce quindi a:

$$\rho \int_0^\delta u(u - U) dy = - \int_0^x \tau_0 dx \quad (10.19)$$

Utilizzando la definizione dello spessore di quantità di moto dello strato limite, il termine a sinistra della (10.19) risulta pari a $-\rho U^2 \delta_2$ e ciò consente di ottenere la relazione (10.18).

Per poter procedere a calcolare $\delta_0(x)$ è necessario conoscere il profilo di velocità all'interno dello strato e τ_0 in funzione di δ_0 . Si ipotizzi quindi che il moto

all'interno dello strato sia in regime laminare e si assuma all'interno dello strato il profilo di velocità:

$$\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta_0}\right) - \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^2$$

che costituisce un'approssimazione del profilo di velocità reale. Si ottengono quindi le relazioni:

$$\int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{2}{15} \delta_0 \quad (10.20)$$

$$\tau_0 = \mu \left[\frac{du}{dy} \right]_{y=0} = 2\mu \frac{U}{\delta_0} \quad (10.21)$$

che, sostituite nella (10.18) conducono a:

$$\left(\frac{\delta(x)}{x} \right)^2 = \frac{30\nu}{Ux}$$

o, equivalentemente:

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}}. \quad (10.22)$$

dove $Re_x = Ux/\nu$ La (10.22) fornisce lo spessore dello strato limite in funzione della distanza dal bordo di attacco della piastra, mentre la tensione tangenziale τ_0 sulla piastra risulta pari a:

$$\tau_0(x) = \frac{2\mu U}{5.48x \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}} = \frac{0.365\rho U^2}{\sqrt{Re_x}}. \quad (10.23)$$

La forza, per unità di larghezza, esercitata dal fluido su ciascuna faccia della piastra, lunga L , è pari a:

$$R = \int_0^L \tau_0(x) dx = 0.73 \frac{\rho U^2 L}{\sqrt{\frac{UL}{\nu}}}$$

che, introducendo il coefficiente di resistenza c_R , è solitamente espressa come:

$$R = c_R(Re) \frac{\rho U^2}{2} L$$

dove

$$c_R = \frac{1.46}{\sqrt{Re}} \quad \text{con} \quad Re = \frac{UL}{\nu}.$$

Si noti come l'aver considerato la presenza dello strato limite abbia consentito di superare il paradosso di d'Alembert illustrato nel capitolo 9, in quanto nella

trattazione sviluppata precedentemente il fluido esercita una forza sulla piastra. È lecito a questo punto domandarsi quanto i risultati sopra dipendano dal profilo di velocità utilizzato per approssimare quello reale all'interno dello strato limite. Nel prossimo paragrafo sarà ottenuta la soluzione esatta del moto laminare all'interno dello strato limite su lastra piana e successivamente saranno presentati i risultati ottenuti utilizzando una diversa approssimazione per il profilo di velocità.

10.3.2 Soluzione simile per lo strato limite stazionario su lastra piana

Nell'ipotesi di spessore nullo della piastra, il moto a potenziale (uniforme) e stazionario non risulta influenzato dalla presenza della piastra sicché:

$$U = U(x, y) = \text{costante} \quad (10.24)$$

Inoltre la pressione esterna risulta costante e pari a p_0 . Le equazioni dello strato limite si riducono, nel caso stazionario, alle

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (10.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10.26)$$

$$u = v = 0 \quad (y = 0 \quad 0 \leq x \leq L) \quad (10.27)$$

$$u \rightarrow U \quad \left(\frac{y}{\delta_0} \rightarrow \infty \quad 0 \leq x \leq L \right) \quad (10.28)$$

e lo spessore caratteristico dello strato limite è funzione di x e, come visto in precedenza, deve crescere con x .

La (10.7) suggerisce che l'ordine di grandezza di $\delta_0(x)$ è $xR_x^{-1/2}$ con R_x definito nella forma Ux/ν . Il fatto che sia $\delta_0 \sim O(xR_x^{-1/2})$ suggerisce di rendere adimensionali le equazioni utilizzando $(xR_x^{-1/2})$ quale scala delle ordinate. Definiamo dunque :

$$\eta = \frac{y}{xR_x^{-1/2}} = \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} y. \quad (10.29)$$

L'equazione di continuità è automaticamente soddisfatta introducendo la funzione di corrente ψ tale che

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Considerato che le dimensioni della funzione di corrente sono uguali a quelle del prodotto di una velocità per una lunghezza e che, poiché si cerca una soluzione simile, essa dipende dalla variabile η , è lecito porre:

$$\psi = U \sqrt{\frac{\nu x}{U}} f(\eta) \quad (10.30)$$

Poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{y \sqrt{U}}{\sqrt{\nu}} \left(-\frac{1}{2x \sqrt{x}} \right) = -\frac{\eta}{2x} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{\nu x}} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned}$$

è possibile ricavare

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \frac{df}{d\eta}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{U \sqrt{U}}{\sqrt{\nu x}} \frac{d^2 f}{d\eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{U^2}{\nu x} \frac{d^3 f}{d\eta^3}, & \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{U \eta}{2x} \frac{d^2 f}{d\eta^2}, \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{\nu U} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} f - \frac{\sqrt{x} \eta}{2x} \frac{df}{d\eta} \right] \end{aligned}$$

Utilizzando le precedenti relazioni, l'equazione di Navier-Stokes nella direzione x (equazione (10.25)) fornisce un'equazione differenziale ordinaria non lineare per $f(\eta)$

$$\frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{d^3 f}{d\eta^3} = 0 \quad (10.31)$$

con le condizioni al contorno

$$\frac{df}{d\eta} = f = 0 \quad (\eta = 0) \quad (10.32)$$

$$\frac{df}{d\eta} \rightarrow 1 \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (10.33)$$

La soluzione di tale problema è stata ottenuta per la prima volta da Blasius (1908) in forma di sviluppo in serie. Essa è stata poi ottenuta numericamente ed è riportata in figura 10.5.

In figura 10.5 è mostrato un confronto tra il profilo di velocità ottenuto con la soluzione simile illustrata e i risultati sperimentali di Nikuradse (1942), ottenuti a diverse distanze dal bordo di attacco della piastra, quindi caratterizzati da un diverso valore del numero di Reynolds R_x .

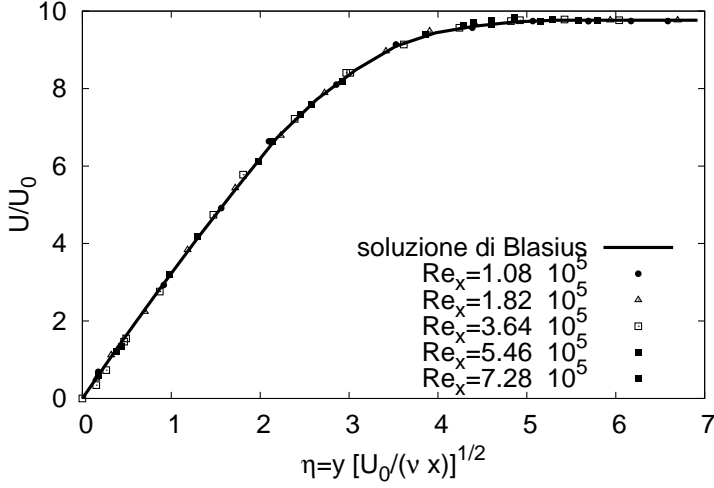


Figura 10.5

È immediato il calcolo della tensione tangenziale alla parete:

$$[\tau]_{y=0} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{\rho U^2}{\sqrt{R_x}} \left[\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right]_{(\eta=0)} = 0.33 \frac{\rho U^2}{\sqrt{R_x}} \quad (10.34)$$

e della resistenza al moto offerta dalla piastra:

$$R = \int_0^L \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx = 0.665 \frac{\rho U^2 L}{\sqrt{\frac{UL}{\nu}}} \quad (10.35)$$

Utilizzando la definizione analitica di δ_0 come distanza dalla parete alla quale $u = 0.99U$, i risultati numerici forniscono

$$\delta_0 = 4.9 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (10.36)$$

e

$$\delta_1 = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (10.37)$$

per lo spessore di spostamento.

10.3.3 Ulteriore soluzione approssimata ottenuta attraverso il metodo integrale

È di interesse confrontare i risultati ottenuti attraverso l'analisi esatta con quelli approssimati ottenibili utilizzando le equazioni integrali di V. Kàrmàn, già impiegate nella sezione 10.3.1 ma con un diverso profilo di velocità.

Approssimando la distribuzione della velocità nello strato attraverso le relazioni

$$u = U \sin \left(\frac{\pi y}{2 \delta} \right) \quad 0 \leq y \leq \delta(x) \quad (10.38)$$

$$u = U \quad y \geq \delta(x) \quad (10.39)$$

che risultano qualitativamente accettabili non solo nel caso di una piastra piana ma anche di profili per i quali il moto a potenziale esterno non accelera troppo rapidamente, si ottiene

$$\delta_1 = \int_0^{\delta_0} \left(1 - \sin \left(\frac{\pi y}{2 \delta} \right) \right) dy = \delta_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \quad (10.40)$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta_0} \sin \left(\frac{\pi y}{2 \delta} \right) \left(1 - \sin \left(\frac{\pi y}{2 \delta} \right) \right) dy = \frac{2 \delta_0}{\pi} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) . \quad (10.41)$$

Sostituendo le espressioni precedenti nella (10.18), si ottiene:

$$\frac{\pi^2 \nu}{4 \delta_0} = U \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{d \delta_0}{dx} \quad (10.42)$$

donde, integrando, segue:

$$\delta_0 = 4.8 \left(\frac{\nu x}{U} \right)^{1/2} ; \quad \delta_1 = 1.74 \left(\frac{\nu x}{U} \right)^{1/2} . \quad (10.43)$$

Quanto descritto precedentemente presuppone che il regime di moto entro lo strato limite si mantenga laminare. Tuttavia, quando il numero di Reynolds $Re_x = Ux/\nu$ supera un valore critico che si aggira attorno a 5×10^5 , disturbi del campo di moto sempre presenti tendono ad amplificarsi invece che ad attenuarsi e si osserva la transizione da regime di moto laminare al regime turbolento, come è possibile osservare in figura 10.6. Lo strato limite turbolento sarà illustrato nel capitolo successivo.

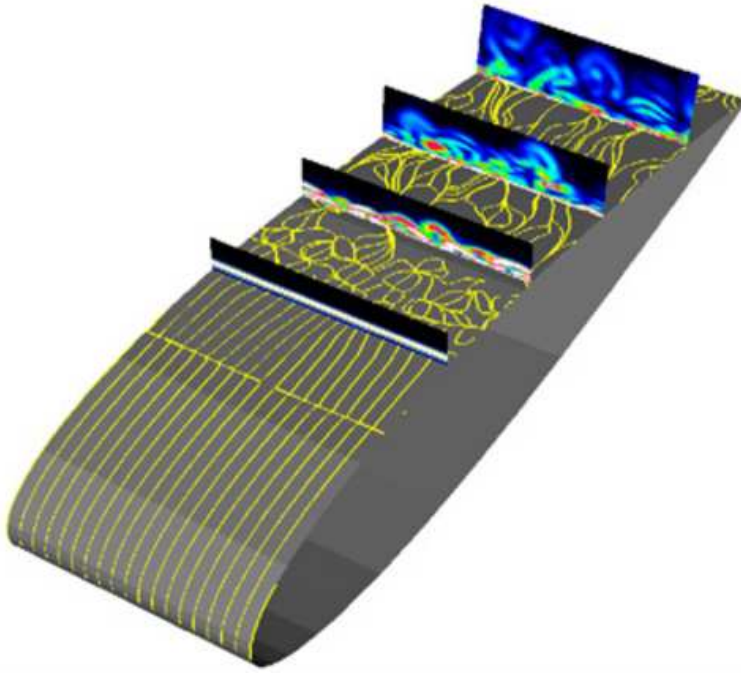


Figura 10.6: Strato limite su un'ala: evoluzione dal regime laminare al regime turbolento.

10.4 Effetto della de-(o ac-)celerazione del moto a potenziale esterno

In primo luogo esaminiamo sul piano qualitativo l'effetto della decelerazione o dell'accelerazione spaziale del moto a potenziale esterno. Tale de-(o ac-)celerazione si manifesta ovviamente in presenza di un gradiente di pressione esterno. L'equazione di continuità integrata fornisce

$$v(y) = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (10.44)$$

Se il moto a potenziale esterno decelera si ha $\partial U / \partial x < 0$, cioè $(\partial u / \partial x)$ risulta negativo in prossimità del bordo dello strato (e probabilmente ovunque nello strato). Segue che v risulta verosimilmente positivo. Ciò implica che convezione (normale alla parete) e diffusione viscosa collaborano a trasportare la vorticità lontano dalla parete. È lecito dunque attendersi che lo strato limite tenderà a ispessirsi assai di più che nel caso della piastra piana. Ciò, come vedremo, conduce talvolta al fenomeno della separazione dello strato limite, cioè a una configurazione di moto nella quale il moto esterno non è più sensibilmente parallelo alla

parete. Questo aspetto verrà esaminato meglio nel seguito e risulta di enorme importanza per i moti e le forze esercitate in presenza di corpi tozzi.

Risultati opposti è lecito attendersi nel caso di moti potenziali esterni accelerati.

Un'indicazione sull'effetto della decelerazione del moto a potenziale sul profilo di velocità nello strato limite si ottiene considerando la soluzione, dovuta a Falkner & Skan (1930), del moto attorno intorno ad un diedro, mostrato in figura 10.7, che forma un angolo $\alpha = 2m\pi/(m+1)$, dove m è un numero intero. Il campo di moto è ottenuto calcolando dapprima il moto a potenziale esterno allo strato limite utilizzando la trasformazione conforme $\zeta = z^n$ (con $n = \frac{m+1}{2}$), presentata nel paragrafo 9.4.2 e quindi calcolando la soluzione similare indotta all'interno dello strato limite.

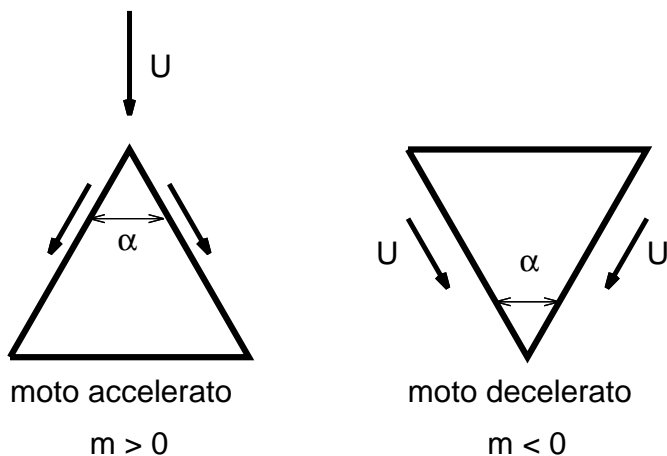


Figura 10.7

In figura 10.8 sono mostrati i profili di velocità ottenuti al variare dell'ampiezza dell'angolo α , cioè per situazioni in cui il moto esterno accelera o decelera. Alcune importanti caratteristiche dei profili di velocità sono:

- profili di velocità corrispondenti a moti esterni decelerati ($m < 0$) presentano un punto di flesso; nel caso $m = 0$ il punto di flesso si presenta alla parete
- per valori negativi di m la curvatura del profilo in $y = 0$ diventa positiva e per $m = -0.0904$ il gradiente di velocità alla parete diventa nullo, quindi anche il valore della tensione tangenziale sulla parete si annulla. A questo valore corrisponde la massima decelerazione sopportabile dallo strato limite senza condurre a inversione del moto.

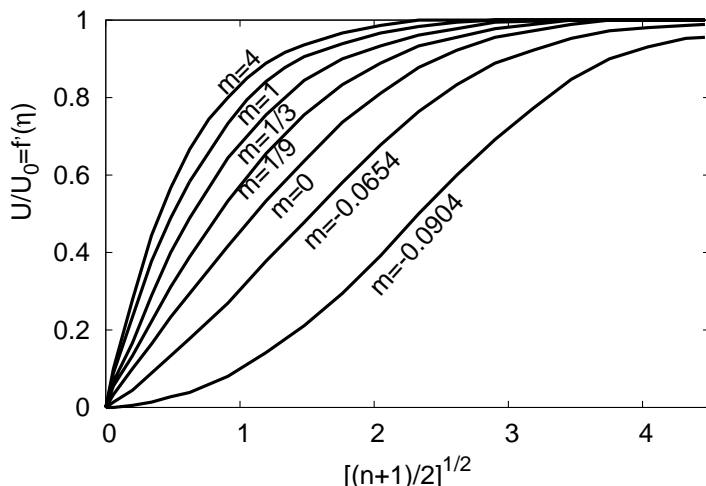


Figura 10.8

Al valore $m = -0.0904$ corrisponde un angolo $\alpha/2$ di circa 18° .

10.5 Separazione dello strato limite

10.5.1 Nozione

La presenza di vaste zone di ricircolazione a valle di corpi di forma 'tozza' si manifesta sempre più chiaramente al crescere del numero di Reynolds fra 1 e 100. In questo intervallo di valori di Re il moto nella zona adiacente la parete non ha la struttura di un moto del tipo strato limite. Tuttavia osservazioni sperimentali del moto intorno a corpi tozzi per valori elevati di Re , per i quali il moto a monte configura la formazione di uno strato limite, rivelano un analogo distacco laterale delle linee di corrente. Il moto nella scia a valle del corpo è non stazionario e risulta via via meno evidente la presenza di zone di ricircolazione stazionarie.

Il distacco delle linee di corrente lateralmente a corpi tozzi investiti da correnti stazionarie a elevati numeri di Reynolds con formazione di zone di lenta ricircolazione non stazionaria a valle del corpo è un classico esempio di '*separazione dallo strato limite*'. Tale fenomeno non si verifica solo nel caso di moti esterni, bensì anche in moti interni: si pensi, ad es., al moto a valle di un brusco (o graduale) allargamento di sezione in un condotto.

10.5.2 Origine della separazione

La causa del fenomeno della separazione può sempre ricondursi a una decelerazione sufficientemente rapida del moto a potenziale esterno allo strato limite. Soluzioni del tipo Falkner-Skan rivelano infatti che gli strati limite non sopportano decelerazioni esterne.

Il confronto fra le due configurazioni di moto in figura 10.5 conferma che una forte decelerazione associata alla presenza di una parete lungo la quale deve essere soddisfatta la condizione di aderenza determina il fenomeno.

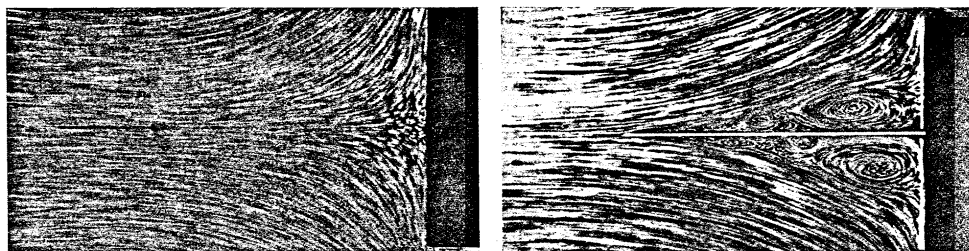


Figura 10.9: Moto intorno a un punto di ristagno senza (a sinistra) e con (a destra) una parete sottile posta nel piano di simmetria. Immagini da Föttinger H., 1939, *Mitteilungen der Vereinigung der Gross-Kesselbesitzer*, n. 73, p.151

In assenza della parete orizzontale la decelerazione non provoca moto di ricircolazione che si manifesta non appena si introduce una parete che genera vorticità (e quindi lo sviluppo di uno strato limite se Re è sufficientemente grande).

10.5.3 Punto di separazione

La posizione del **punto di separazione** (punto presso il quale ha inizio il distacco dalla parete delle linee di corrente che si mantenevano adiacenti la parete nella porzione precedente dello strato) non è dunque prevedibile teoricamente. Usualmente lo si considera coincidente col punto caratterizzato da valore nullo della tensione tangenziale $[(\partial u / \partial y)_{y=0}]$, essendo y la coordinata normale alla parete. Tale definizione è confermata sperimentalmente nei limiti della accettabilità dei risultati sperimentali (assai complessi peraltro).

Alcune informazioni sul punto di separazione sono tuttavia disponibili:

- i) se la parete presenta uno spigolo vivo lo strato limite si separa in tale posizione. In corrispondenza dello spigolo infatti la velocità esterna assume un valore molto grande (teoricamente infinito); ne segue una for-

te decelerazione nella porzione di parete a valle dello spigolo e quindi la separazione.

Si noti che in questo caso la velocità del moto esterno allo strato non decresce in prossimità dal punto di separazione. Inoltre una integrazione diretta delle equazioni dello strato con la distribuzione di velocità esterna osservata sperimentalmente non fornisce in questo caso alcuna indicazione dell'avvicinarsi del punto di separazione.

- ii) Se la separazione si presenta su corpi di forma regolare, le linee di corrente adiacenti la parete formano con questa un angolo nullo. Ciò è giustificabile con semplici considerazioni fisiche.

Se infatti tale angolo non fosse nullo, la velocità di moto irrotazionale in corrispondenza del punto di separazione S dovrebbe risultare nulla (la parete e le linee di corrente a valle della separazione possono considerarsi infatti quali pareti di contorno di un diedro). Ne conseguirebbe la presenza di una rilevante decelerazione a monte di S e, quindi, l'insorgere della separazione precedente a S . L'ipotesi di un angolo nullo è quindi l'unica ipotesi accettabile.

10.6 Moto indotto da corpi in moto stazionario

Il moto indotto da un corpo che si muove in moto stazionario in un fluido in quiete all'infinito, o, equivalentemente il moto generato attorno a un corpo da un fluido in moto uniforme e stazionario all'infinito, è un problema che riveste una notevole importanza pratica.

La conoscenza del moto attorno a corpi tozzi è basata principalmente su osservazioni sperimentali e consiste nello studio della dipendenza delle caratteristiche generali del campo di moto dal numero di Reynolds.

L'aspetto del campo di moto che riveste la maggior importanza pratica è la determinazione della forza esercitata dal fluido sul corpo. I contributi alla forza totale esercitata sul corpo sono dovuti alle tensioni tangenziali e alle tensioni normali agenti sulla superficie del corpo, integrati sulla superficie.

Il contributo dovuto alle tensioni tangenziali, generalmente ha la direzione opposta a quella di avanzamento del corpo ed è detto **resistenza viscosa** o **di attrito**, essendo una diretta conseguenza della viscosità del fluido. Il contributo dovuto alle tensioni normali sulla superficie del corpo in moto stazionario ha un'origine più complessa ed è generalmente scomposto in **portanza**, discussa in precedenza, e **resistenza di forma** che è la risultante della forza dovuta alle pressioni nella direzione di avanzamento del corpo. La resistenza di forma dipende dalla forma e

dall'orientamento del corpo e può essere ridotta sagomando e orientando il corpo opportunamente.

Nel seguito la discussione delle forze esercitate dal fluido sarà affrontata considerando prima il caso in cui lo strato limite non separa e successivamente il caso in cui sia presente separazione dello strato limite.

10.6.1 Campo di moto senza separazione

Una volta calcolata la distribuzione della velocità nel moto irrotazionale esterno allo strato limite, è possibile calcolare la tensione tangenziale su ogni punto della superficie del corpo, ad esempio integrando numericamente le equazioni semplificate dello strato limite (10.4) e (10.8). Integrando la componente nella direzione del moto della tensione alla parete, si può calcolare la forza a cui è soggetto il corpo. Per un corpo bidimensionale, tale forza, per unità di larghezza, è una resistenza viscosa F_D che può essere espressa come:

$$F_D = C_D \rho U_0^2 L Re^{-\frac{1}{2}}$$

dove C_D è una costante opportuna che dipende dalla forma del corpo, U_0 è la velocità di avanzamento del corpo, L è una dimensione caratteristica (lunghezza) del corpo mentre $Re = U_0 L / \nu$. Se il corpo è tridimensionale si ottiene una formula simile dove la lunghezza L è sostituita da un'area caratteristica del corpo e la resistenza, oltre alla componente viscosa, potrebbe presentare il contributo della resistenza indotta.

Nel limite di valori del numero di Reynolds tendenti a infinito, quando lo strato limite tende ad avere spessore nullo, la resistenza di forma sul corpo è nulla come predetto dalla teoria irrotazionale. Per valori finiti del numero di Reynolds, l'esistenza di uno strato limite sottile e di una scia, ha poca influenza sulla forma del moto irrotazionale esterno e di conseguenza ha un effetto modesto sulla distribuzione della pressione sulla superficie del corpo.

L'effetto che nella realtà ha la presenza dello strato limite sul moto irrotazionale esterno e sulla distribuzione di pressione sulla superficie del corpo si comprende osservando che le linee di corrente del moto irrotazionale sono spostate lateralmente sia a causa della presenza del corpo che dello strato limite, che cresce in spessore a partire dal bordo di attacco del corpo. La presenza dello strato limite induce quindi un aumento della velocità in prossimità del corpo e di conseguenza la diminuzione del valore della pressione sulla superficie del corpo. A questo effetto è associata una resistenza diversa da zero. La pressione sulla superficie del corpo differisce dal corrispondente valore caratteristico del moto irrotazionale per

una quantità proporzionale allo spessore di spostamento dello strato, che, come discusso in precedenza, è proporzionale a $Re^{-\frac{1}{2}}$.

10.6.2 Campo di moto con separazione

Le caratteristiche generali del campo di moto differiscono da quelle descritte precedentemente se si verifica la separazione dello strato limite. Tale fenomeno avviene in presenza di corpi tozzi oppure non correttamente allineati con la direzione del moto. In questi casi le decelerazioni spaziali che si hanno nel moto irrotazionale esterno, a causa della forma del corpo, sono tali da causare il fenomeno di distacco dello strato limite dalla superficie del corpo.

La conoscenza del campo di moto attorno a un corpo tozzo è essenzialmente empirica. La vorticità nella zona a monte rimane confinata in sottili strati limite attaccati alla superficie del corpo, mentre il moto esterno è irrotazionale. Tuttavia il contorno della regione irrotazionale, formato dalle linee di corrente che si separano dalla superficie del corpo, ha una forma complessa variabile nel tempo e a priori incognita; di conseguenza non è possibile calcolare il moto irrotazionale.

In figura 10.10 è mostrato il campo di moto che si sviluppa attorno ad un cilindro in moto impulsivo. La figura 10.10b mostra un istante prossimo a quello in cui il corpo ha iniziato a muoversi; è evidente l'inizio della formazione di una zona di ricircolazione a valle del cilindro. In figura 10.10c è molto evidente la presenza di una zona di separazione dello strato limite e la vorticità è trasportata verso valle. La zona di ricircolazione a valle del cilindro aumenta di dimensione al passare del tempo fino a che nella figura 10.10e risulta più grande delle dimensioni del cilindro stesso. Successivamente i due vortici a valle del cilindro sono soggetti a oscillazioni asimmetriche, infatti si staccano, alternativamente dalla superficie superiore e inferiore del cilindro (figura 10.10f). A distanze dal cilindro pari a quattro o cinque diametri, si osservano due scie di vortici dello stesso segno. Quando il numero di Reynolds del moto raggiunge il valore 4×10^5 , lo strato limite sulla superficie del cilindro diventa turbolento e le oscillazioni periodiche nel moto in vicinanza del cilindro scompaiono.

Mentre la resistenza viscosa costituisce il contributo maggiore della resistenza attorno a un corpo sottile, la resistenza di forma è responsabile della maggior parte della resistenza a cui sono soggetti i corpi tozzi.

Quando lo strato limite separa dalla superficie di un corpo tozzo, le linee di corrente a valle del punto di separazione racchiudono una vasta regione in cui la pressione non varia apprezzabilmente essendo ivi le velocità molto più piccole di U_0 , ordine di grandezza della velocità del moto irrotazionale. Il valore della pressione in questa zona è circa lo stesso di quello imposto dal moto irrotazionale

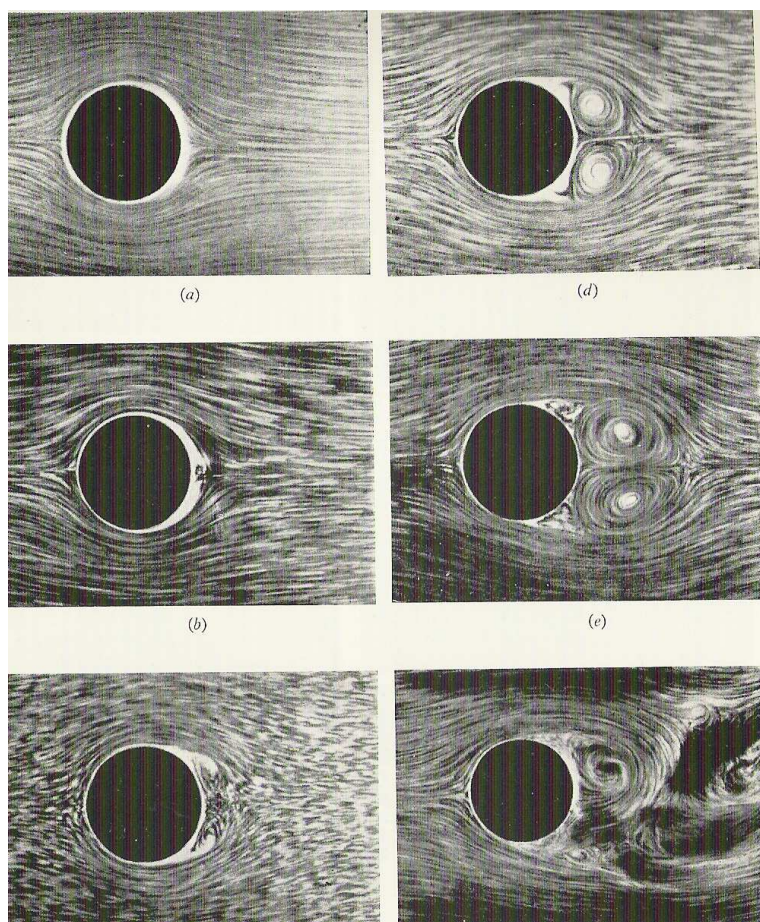


Figura 10.10: Sviluppo temporale del campo di moto attorno a un cilindro di sezione circolare messo impulsivamente in moto. Immagini da Prandtl (1927).

in prossimità del punto di separazione sulla superficie del corpo mentre sulla superficie anteriore del corpo, vicino al punto di ristagno, la pressione è elevata. La distribuzione della pressione sulla superficie del corpo mostra quindi una asimmetria tra monte e valle la cui conseguenza pratica è la comparsa di una resistenza di forma.

Queste considerazioni sono supportate dalle misure della distribuzione della pressione sulla superficie di un cilindro a sezione circolare, mostrate in figura 10.11. Si noti come su una grande parte della superficie posteriore del cilindro la pressione sia sensibilmente uniforme e differente dalla distribuzione di pressione che si avrebbe in presenza di moto irrotazionale.

A monte di detta regione lo strato limite resta aderente alla superficie del cilindro quindi la velocità U sul bordo dello strato può essere calcolata nota la pressione, utilizzando il teorema di Bernoulli:

$$\frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = 1 - \left(\frac{U}{U_0}\right)^2.$$

Poiché le variazioni di pressione sulla superficie del corpo sono legate a variazioni della velocità di ordine U_0 , l'applicazione del teorema di Bernoulli suggerisce che la resistenza di forma sia di ordine $\frac{1}{2}\rho U_0^2$ volte l'area frontale del corpo. Sulla base di questa considerazione le resistenze su corpi tozzi vengono espresse in termini del coefficiente di resistenza (detto anche coefficiente di drag) definito come:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 A}$$

dove F_D è la forza di resistenza totale sul corpo in un fluido con velocità U_0 all'infinito, e A è l'area della proiezione del corpo su un piano normale alla direzione del moto all'infinito. Il coefficiente C_D dipende dal numero di Reynolds.

Le misure del coefficiente di resistenza per un cilindro circolare (figura 10.12) mostrano una brusca diminuzione quando il numero di Reynolds supera una soglia critica compresa tra 10^5 e 4×10^5 , il cui valore esatto dipende dall'apparato sperimentale utilizzato. Questo fenomeno è dovuto al variare del regime di moto all'interno dello strato limite. Quando il numero di Reynolds supera il valore critico, il moto laminare e stazionario all'interno dello strato limite risulta instabile ed è rimpiazzato da un moto turbolento.

Poiché il trasporto di quantità di moto all'interno di un moto turbolento è maggiore di quello in un moto laminare, lo strato limite turbolento è meno soggetto dello strato limite laminare a sviluppare tensioni nulle sulla superficie del corpo quando il moto estremo decelera. Come conseguenza lo strato limite turbolento è in grado di sopportare decelerazioni maggiori rispetto allo strato limite laminare

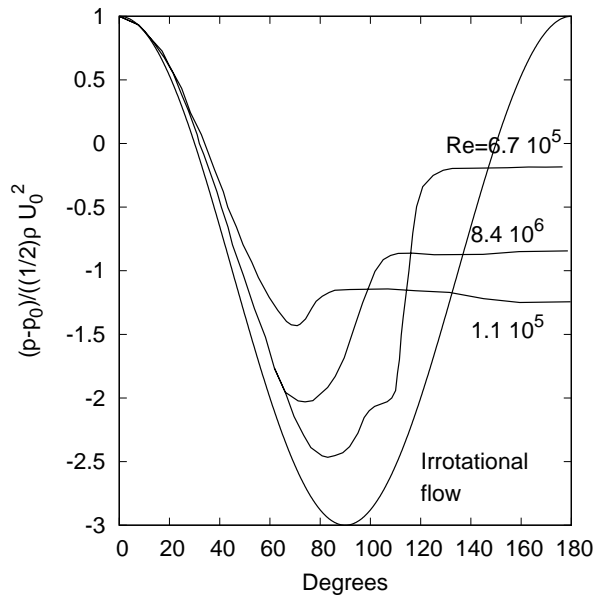


Figura 10.11: Distribuzione della pressione sulla superficie di un cilindro di sezione circolare per diversi valori del numero di Reynolds. Immagine da Batchelor, 1967, An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press, 615 pagine.

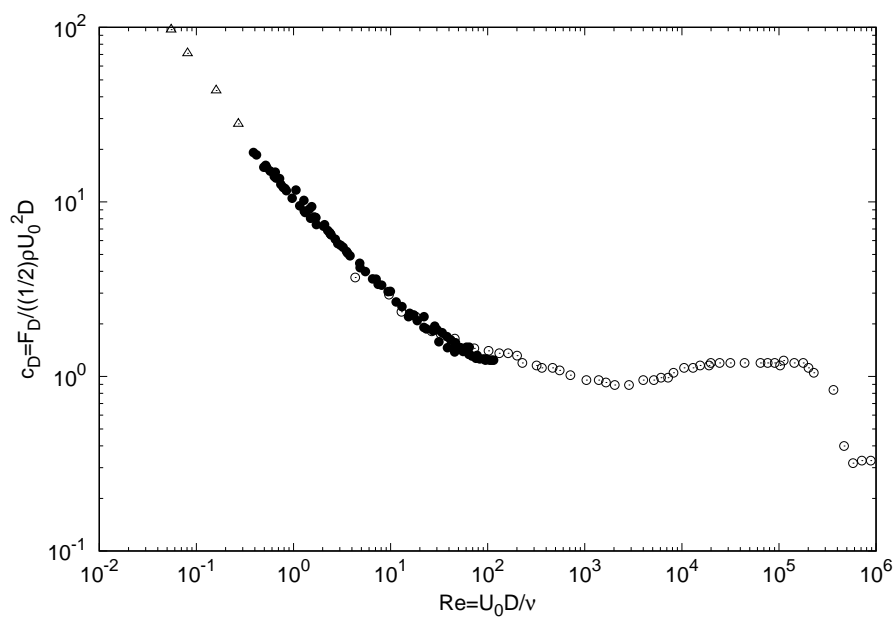
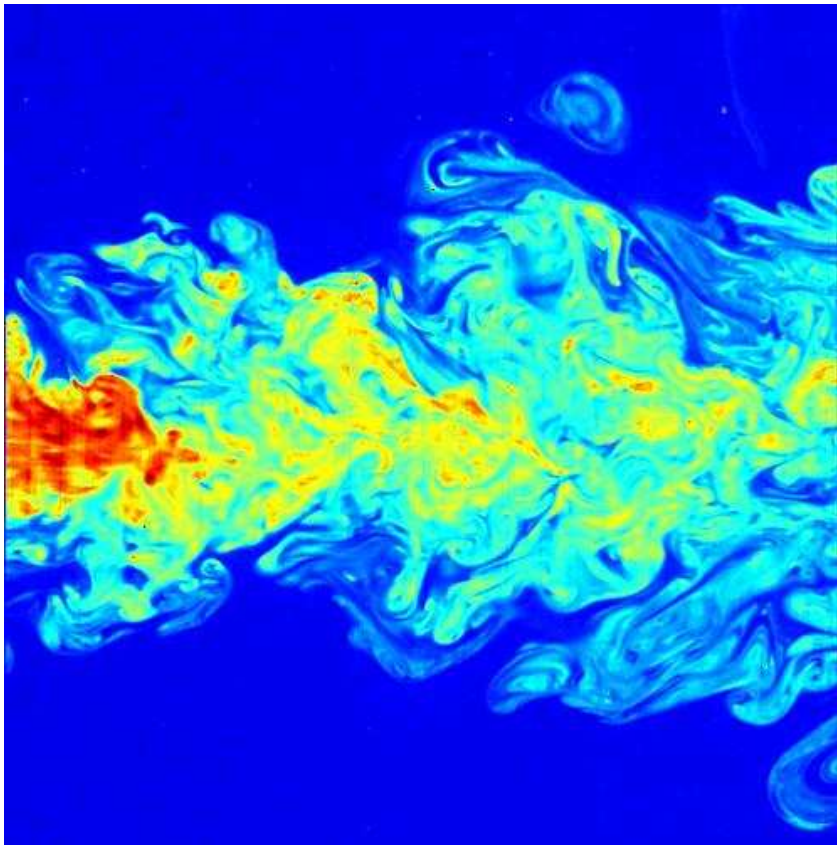


Figura 10.12: Coefficiente di resistenza su un cilindro. I risultati sperimentali sono di diversi autori indicati con simboli diversi.

prima di separarsi dalla superficie del moto. La posizione del punto di separazione, se lo strato limite è in regime di moto turbolento, si sposta quindi nella parte posteriore del cilindro. Diminuisce quindi l'estensione della zona di ricircolazione a valle del cilindro e la resistenza di forma risulta minore.

MOTI TURBOLENTI

Dove si studia la dinamica della turbolenza e delle sue strutture vorticosi



Campo di moto generato da un getto sommerso visualizzato con la tecnica 'laser induced fluorescence (LIF)'. Immagine con falsi colori di C. Fukushima and J. Westerweel, Technical University of Delft, The Netherlands

In particolari condizioni (spesso quando il numero di Reynolds caratteristico del moto assume valori elevati), le grandezze che caratterizzano il campo di moto (velocità, pressione, ...) assumono valori che sono funzioni casuali, cioè stocastiche, della posizione \mathbf{x} e del tempo t . In altre parole, non si è in grado di predire la velocità o la pressione o qualunque altra grandezza di un moto turbolento a un tempo fissato t_0 e in una posizione assegnata \mathbf{x}_0 , sulla base dei dati macroscopici del problema. Si assume invece che siano predicibili le leggi probabilistiche che controllano il fenomeno e in particolare i valori medi probabilistici (medie di insieme).

Se denotiamo con $f(\mathbf{x}, t)$ una qualunque grandezza atta a definire il moto e con $f_j(\mathbf{x}, t)$ il valore che essa assume al tempo t e nella posizione \mathbf{x} durante la j -esima realizzazione del fenomeno, è possibile definire la media della grandezza f come:

$$\langle f(\mathbf{x}, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j(\mathbf{x}, t) \quad (11.1)$$

che è la versione discreta della relazione

$$\langle f(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f p(f) df$$

dove $p(f)$ è la funzione densità di probabilità della variabile f .

L'approccio più usato nello studio dei moti turbolenti è quello di utilizzare equazioni che descrivono l'evoluzione della velocità e della pressione medie. Tali equazioni, come vedremo, sono ottenute dall'equazione di Navier-Stokes e di continuità.

11.1 Le equazioni del moto

Definite, nei moti turbolenti, la velocità media e la pressione media

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rangle \quad P = \langle p(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (11.2)$$

i valori attuali della velocità e della pressione possono essere visti come la somma del valor medio e di una parte oscillante che ha media nulla:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}' = \mathbf{V} + \mathbf{v}' \quad p = \langle p \rangle + p' = P + p' \quad (11.3)$$

ove

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = 0 \quad \langle p' \rangle = 0 \quad (11.4)$$

Tenendo quindi conto che

$$\langle \mathbf{V} \rangle = \mathbf{V} \quad \langle P \rangle = P \quad (11.5)$$

dall'equazione di continuità, dopo aver effettuato l'operazione di media e dopo semplici passaggi si ottiene

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0. \quad (11.6)$$

Cioè il moto medio soddisfa la stessa equazione che è soddisfatta dal campo di moto istantaneo:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (11.7)$$

Sottraendo la (11.7) dall'equazione di continuità per il campo di moto istantaneo, si verifica facilmente che anche il moto di fluttuazione è solenoidale

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (11.8)$$

Considerando invece l'equazione di Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} \right] = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \quad (11.9)$$

e sostituendo le (11.3) si ottiene

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (V_i + v'_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} ((V_j + v'_j)(V_i + v'_i)) \right] = \rho f_i + \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p') + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (V_i + v'_i) \end{aligned} \quad (11.10)$$

Applicando quindi l'operazione di media e tenendo conto che l'operatore "media" definito dalla (11.1) è lineare, si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} (\langle V_i \rangle + \langle v'_i \rangle) + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle V_j V_i \rangle + \langle v'_j V_i \rangle + \langle V_j v'_i \rangle + \langle v'_j v'_i \rangle) = \\ = \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle P \rangle + \langle p' \rangle) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (\langle V_i \rangle + \langle v'_i \rangle) \end{aligned} \quad (11.11)$$

Considerato che la media d'insieme di una grandezza media coincide con quest'ultima e che la media di una componente casuale è nulla, si perviene a

$$\rho \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + \frac{\partial (-\rho \langle v'_i v'_\ell \rangle)}{\partial x_\ell} \quad (11.12)$$

L'equazione precedente, nota come equazione di Reynolds, può essere anche scritta nella forma

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + \frac{\partial T_{\ell i}^R}{\partial x_\ell} \quad (11.13)$$

ove con T^R si indica un tensore, noto come tensore delle tensioni di Reynolds, definito da

$$T^R = \begin{pmatrix} \langle -\rho v'_1 v'_1 \rangle & \langle -\rho v'_1 v'_2 \rangle & \langle -\rho v'_1 v'_3 \rangle \\ \langle -\rho v'_2 v'_1 \rangle & \langle -\rho v'_2 v'_2 \rangle & \langle -\rho v'_2 v'_3 \rangle \\ \langle -\rho v'_3 v'_1 \rangle & \langle -\rho v'_3 v'_2 \rangle & \langle -\rho v'_3 v'_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

che evidenzia la sua simmetria.

Dall'equazione di Reynolds, emerge come l'influenza delle componenti casuali di velocità sul moto medio si manifesta attraverso il termine $(\partial T_{\ell i}^R / \partial x_\ell)$ cioè attraverso l'azione di tensioni apparenti dette appunto tensioni di Reynolds: i gradienti delle tensioni di Reynolds si aggiungono ai gradienti delle tensioni viscosse nel determinare la dinamica dei moti turbolenti. In altre parole si può pensare che l'equazione di Reynolds sia derivabile dall'equazione di Cauchy ove il tensore delle tensioni è modificato come segue:

$$T_{\ell i} = \underbrace{-p\delta_{\ell i} + 2\mu D_{\ell i}}_{\text{tensioni reali}} + \underbrace{\langle -\rho v'_\ell v'_i \rangle}_{\text{tensioni turbolente o tensioni apparenti}} \quad (11.15)$$

Da quanto fino a ora esposto, emerge come il problema di determinare V e P dalle (11.7) e (11.13) sia un problema matematicamente impossibile da risolvere. Invero sono a disposizione 4 equazioni scalari ma accanto alle quattro incognite V_1, V_2, V_3 e P sono presenti ulteriori incognite rappresentate dalle 6 componenti distinte del tensore di Reynolds. Tale problema è noto in letteratura come "problema di chiusura dei moti turbolenti" e può essere risolto solo con approcci in qualche misura empirici.

Alle equazioni (11.6) e (11.12) bisogna associare opportune condizioni al contorno che si ottengono mediando, in senso probabilistico, le condizioni al contorno per il moto istantaneo, analogamente a come è stato fatto per ottenere le equazioni di Reynolds.

11.2 La cascata di energia

I moti turbolenti possono essere immaginati come la sovrapposizione di un gran numero di componenti periodiche nello spazio. Tali componenti costituiscono i "vortici" della turbolenza ("eddies" in inglese).

I vortici più grossi o “macrovortici” sono caratterizzati da una lunghezza scala ℓ_0 e da una velocità scala u_0 paragonabili a quelle del moto medio. Il numero di Reynolds che caratterizza i macrovortici è dunque paragonabile a quello del moto ed è perciò elevato. È ragionevole quindi ritenere che gli effetti viscosi non influenzino significativamente il moto dei macrovortici. A causa degli effetti di non linearità, i macrovortici tendono a formare vortici caratterizzati da scale spaziali sempre più piccole. Questa “cascata di energia”, secondo cui l’energia è trasferita a vortici di scala sempre più piccola, continua fino a quando il numero di Reynolds dei vortici più piccoli è così modesto da consentire agli effetti viscosi di dissipare l’energia della turbolenza che viene estratta dal moto medio per opera dei macrovortici. Secondo questo quadro interpretativo della turbolenza, solo i vortici di piccola scala o “microvortici” sono responsabili della dissipazione di energia.

È possibile definire gli spettri dell’energia turbolenta $F_1(k)$, $F_2(k)$ e $F_3(k)$, tenendo conto che per \mathbf{r} tendente a infinito le funzioni di correlazione

$$R_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \langle v_i(\mathbf{x})v_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

tendono a zero e quindi è possibile definire le trasformate di Fourier

$$F_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) e^{i2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

Assumendo che la struttura della turbolenza sia omogenea e isotropa e quindi indipendente da \mathbf{x} , le funzioni F_{ii} risultano dipendere solo da \mathbf{k} . Quindi si ha

$$R_{ii} = \langle v_i v_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

Definendo infine la funzione $F_i(k)$ nella forma

$$F_i(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{ii}(\mathbf{k}) \delta(|\mathbf{k}| - k) d\mathbf{k}$$

dove $\delta(|\mathbf{k}| - k)$ è la funzione di Dirac di $|\mathbf{k}| - k$, si ottiene

$$\begin{aligned} \langle u_1 u_1 \rangle &= \int_0^{\infty} F_1(k) dk \\ \langle u_2 u_2 \rangle &= \int_0^{\infty} F_2(k) dk \\ \langle u_3 u_3 \rangle &= \int_0^{\infty} F_3(k) dk \end{aligned} \tag{11.16}$$

che, equivalentemente, possono essere scritte come:

$$\begin{aligned}\frac{d\langle u_1 u_1 \rangle}{dk} &= F_1(k) \\ \frac{d\langle u_2 u_2 \rangle}{dk} &= F_2(k) \\ \frac{d\langle u_3 u_3 \rangle}{dk} &= F_3(k)\end{aligned}\tag{11.17}$$

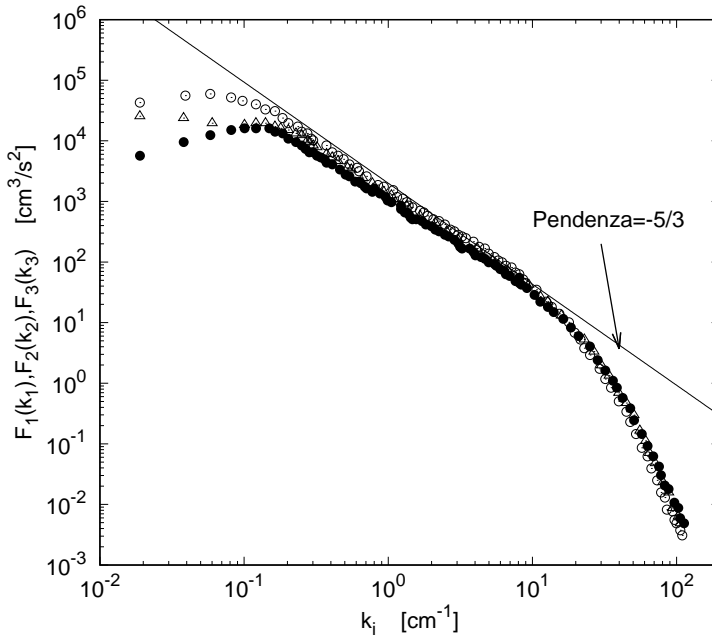


Figura 11.2: Spettri delle fluttuazioni di velocità in un getto turbolento $\circ = F_1$; $\bullet = F_2$; $\triangle = F_3$

La quantità $\rho F_i(k)$ fornisce quindi una misura del contributo dei numeri d'onda compresi tra k e $k + dk$ alla componente ii del tensore di Reynolds. La figura 11.2 mostra gli spettri $F_1(k)$, $F_2(k)$ ed $F_3(k)$ per un getto in moto turbolento. È possibile osservare che le componenti caratterizzate da bassi valori di k (i macrovortici), sono anisotropi, influenzati dalla geometria del moto e contengono la maggior parte dell'energia del moto. I tre spettri F_1 , F_2 e F_3 presentano differenze in questa parte dello spettro.

Considerando numeri d'onda più elevati, l'energia diminuisce, le fluttuazioni divengono meno intense e i tre spettri hanno la stessa dipendenza da k ; per questo intervallo dei numeri d'onda le fluttuazioni turbolente presentano caratteristiche

di isotropia. Kolmogorov, sulla base di considerazioni di tipo dimensionale, ha mostrato che, per valori di k sufficientemente elevati, esiste un intervallo di valori di k , detto intervallo inerziale (“inertial subrange”), in cui gli spettri della turbolenza risultano proporzionali a $k^{-5/3}$. Inoltre Kolmogorov ha ipotizzato che le caratteristiche dei microvortici non siano influenzate dalle caratteristiche macroscopiche del particolare moto considerato, ma siano determinate solo dalla viscosità cinematica ν e dalla velocità di dissipazione dell’energia ε per unità di massa $\left(\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle\right)$.

L’ordine di grandezza di ε può essere stimato osservando che l’energia cinetica (per unità di massa) dei macrovortici ha ordine di grandezza u_0^2 mentre la loro scala temporale è ℓ_0/u_0 . Segue che l’ordine di grandezza di ε è u_0^3/ℓ_0 (essendo pari a energia/tempo). Seguendo Kolmogorov, si ipotizza quindi che per alti valori di k (microvortici) valga la relazione :

$$F_i = f(k, \varepsilon, \nu)$$

che può essere espressa in termini adimensionali come:

$$\frac{F_i}{\varepsilon^{1/4} \nu^{5/4}} = \bar{f}(k\eta) \quad (11.18)$$

dove η è la scala spaziale dei microvortici, detta anche lunghezza di Kolmogorov

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (11.19)$$

Le relazioni precedenti possono essere facilmente ottenute tenendo conto che

$$[F_i] = \frac{L^3}{T^2}, \quad [k] = \frac{1}{L}, \quad [\nu] = \frac{L^2}{T}, \quad [\varepsilon] = \frac{L^2}{T^3}$$

La quantità η rappresenta l’ordine di grandezza delle dimensioni dei microvortici. In modo analogo è possibile ottenere grandezze scala per i tempi e per le velocità. Il rapporto tra la scala spaziale dei macrovortici ℓ e η è:

$$\frac{\ell}{\eta} = \left(\frac{u_0 \ell}{\nu} \right)^{3/4} = Re^{3/4}. \quad (11.20)$$

Se il numero di Reynolds del moto è elevato, la differenza tra le due scale spaziali è notevole. Ciò risulta evidente paragonando i moti in figura 11.3 che si riferiscono a due getti circolari, caratterizzati da un diverso valore di Re .

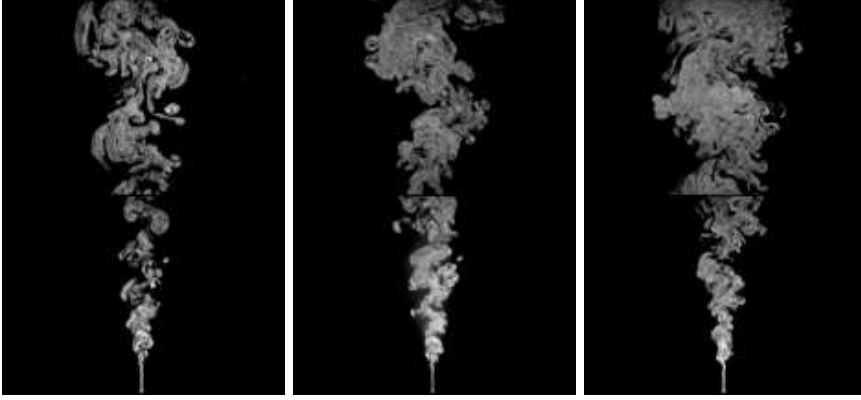


Figura 11.3: Getto in aria. Da sinistra a destra: $Re = 1300$, $Re = 2300$, $Re = 5100$. (immagine gentilmente fornita dal Prof. N Clemens, University of Texas at Austin)

11.3 La viscosità turbolenta

Istituendo un'analogia tra le tensioni di Reynolds e quelle viscosi presenti in un fluido Newtoniano, Boussinesq (1877) ipotizzò che:

$$-\langle \rho v'_\ell v'_i \rangle = \mu_T \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_\ell} + \frac{\partial V_\ell}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{\ell i} K_t \quad (11.21)$$

dove μ_T è una funzione del tempo e della posizione, detta viscosità turbolenta, che dipende dal particolare moto considerato mentre

$$K_t = \frac{1}{2} \rho \langle (v'_1)^2 + (v'_2)^2 + (v'_3)^2 \rangle \quad (11.22)$$

rappresenta l'energia cinetica per unità di volume associata alle oscillazioni di velocità. Il termine $-(2/3) \delta_{\ell i} K_t$ che appare nella (11.21) è stato introdotto affinché la somma degli elementi sulla diagonale del tensore \mathbf{T}^R assuma il valore corretto, cioè $-2K_t$.

Benché siano stati messi in evidenza numerosi limiti della relazione proposta da Boussinesq, anche attraverso confronti con risultati sperimentali, essa costituisce uno degli ingredienti fondamentali di diversi modelli di turbolenza comunemente utilizzati. Per predire il campo di moto medio utilizzando le (11.7), (11.12) e l'ipotesi di Boussinesq, è necessario conoscere il valore di μ_T . Osservazioni sperimentali indicano che le fluttuazioni turbolente legate alla presenza di strutture vorticosi di grande scala spaziale (macrovortici) sono le più rilevanti ai fini del trasporto della quantità di moto e quelle che forniscono il maggior contributo alle

tensioni di Reynolds (si veda anche la figura 11.2). Inoltre la dinamica dei macrovortici, essendo caratterizzati da alti valori del numero di Reynolds, è dominata dagli effetti inerziali e gli effetti della viscosità risultano trascurabili.

Si consideri quindi un moto mediamente piano e unidirezionale caratterizzato da un gradiente di velocità medio dU/dy (figura 11.4). Come si vedrà nella se-

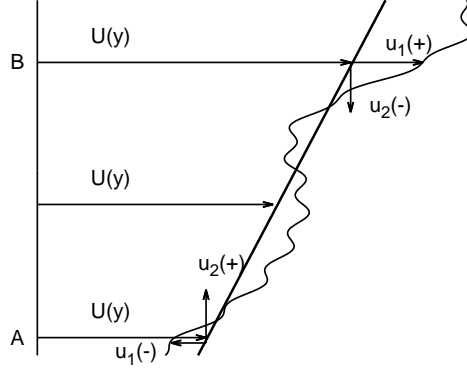


Figura 11.4

zione 11.4, ai fini della determinazione del profilo di velocità la componente del tensore di Reynolds più rilevante è quella tangenziale $-\langle \rho u'_1 u'_2 \rangle$. Per effetto delle fluttuazioni turbolente la particella fluida che si trova in A (figura 11.4) potrà essere trasportata nella posizione B dove la sua quantità di moto sarà più elevata di quella iniziale. Tale variazione di quantità di moto è associata all'azione delle tensioni turbolente. È ragionevole quindi ritenere che la componente $-\langle \rho u'_1 u'_2 \rangle$ del tensore di Reynolds sia funzione della densità, del gradiente di velocità del moto medio, della dimensione e della velocità caratteristica dei macrovortici, caratterizzati da una scala spaziale ℓ e da una velocità u_0 , che trasportano le particelle dalla posizione A alla posizione B:

$$\langle -\rho u'_1 u'_2 \rangle = f(\rho, \ell, u_0, dU/dy) \quad (11.23)$$

L'applicazione del teorema π consente quindi di esprimere la (11.23) nella forma:

$$\frac{\langle -u'_1 u'_2 \rangle}{u_0^2} = \bar{f} \left(\frac{\ell}{u_0} \frac{dU}{dy} \right) \quad (11.24)$$

Ipotizzando che la (11.24) esprima una proporzionalità lineare fra il termine di sinistra e l'argomento della funzione \bar{f} (C costante di proporzionalità) ed esprimendo $\langle -u'_1 u'_2 \rangle$ anche in termini della viscosità cinematica $\nu_T = \mu_T/\rho$, introdotta

dall'ipotesi di Boussinesq, si perviene a

$$\nu_T = C\ell u_0 \quad (11.25)$$

Nonostante la (11.25) sia stata ricavata nell'ipotesi di un moto turbolento mediamente piano e unidirezionale, il legame (11.25) tra ν_T e la lunghezza e la velocità scala caratteristiche dei macrovortici, è considerato valido in qualunque situazione. I valori di ℓ e u_0 possono essere descritti da relazioni algebriche, in questo caso si ottengono modelli di turbolenza a 0 equazioni, non essendo introdotte equazioni differenziali per valutare ℓ e u_0 . Un approccio alternativo consiste nell'esprimere ℓ e/o u_0 in termini di grandezze che caratterizzano il moto turbolento e che sono calcolate risolvendo equazioni di trasporto derivate da quelle di evoluzione delle quantità stesse. Ad esempio ℓ e u_0 possono essere espressi in funzione dell'energia cinetica della turbolenza K_t la cui equazione di evoluzione è riportata più avanti. Si possono sviluppare quindi modelli di turbolenza a 1 o 2 equazioni a seconda del numero di equazioni differenziali introdotte.

Nella sezione conclusiva verrà descritto un modello di turbolenza a due equazioni, mentre nel paragrafo seguente si utilizzerà un modello di turbolenza a 0 equazioni per calcolare il moto turbolento all'interno di un meato.

11.4 Moto turbolento all'interno di un meato

Si consideri il moto turbolento bidimensionale originato da un gradiente di pressione in direzione x_1 tra due pareti piane poste a distanza d (figura 11.5). Con-



Figura 11.5

siderando una regione sufficientemente lontana dalla sezione iniziale, il campo di moto medio può essere ritenuto uniforme e stazionario, cioè:

$$\mathbf{V} = (V_1(x_2), 0, 0) \quad (11.26)$$

Inoltre è ragionevole ritenere che, data la bidimensionalità e uniformità del moto, le componenti del tensore di Reynolds, che caratterizzano le oscillazioni turbolente, siano indipendenti dalle coordinate x_1 e x_3 . Le equazioni di Reynolds per il caso in esame divengono quindi:

$$\frac{d\langle v'_1 v'_2 \rangle}{dx_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu \frac{d^2 V_1}{dx_2^2} \quad (11.27)$$

$$\frac{d\langle v'_2 v'_2 \rangle}{dx_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} - g \quad (11.28)$$

introducendo il carico piezometrico del moto medio $h = P/\gamma + x_2$, l'integrazione della (11.28) porge:

$$h + \frac{\langle v'_2 v'_2 \rangle}{g} = f(x_1) \quad (11.29)$$

con $f(x_1)$ funzione da determinarsi. Quindi nel moto in esame in ogni sezione si mantiene costante la somma del carico piezometrico del moto medio e del termine $\langle v'_2 v'_2 \rangle/g$. Ciò è vero in generale per tutti i moti stazionari e unidirezionali turbolenti. Poiché il termine $\langle v'_2 v'_2 \rangle/g$ risulta molto più piccolo di h , la (11.29) mostra che la pressione è distribuita (quasi) idrostaticamente in ogni sezione del moto.

Si osservi che nella (11.27) il termine $-(1/\rho)\partial P/\partial x_1$ risulta pari a $-g dh/dx_1$ e inoltre $\nu dV_1/dx_2 - \langle v'_1 v'_2 \rangle = \tilde{T}_{12}/\rho$. Ricordando che la componente \tilde{T}_{12} del tensore delle tensioni totali (tensioni viscosse + tensioni di Reynolds) rappresenta la tensione esercitata dal fluido in direzione x_1 su un elemento di normale parallela a x_2 (tensione tangenziale), e indicato tale termine con $\tau(x_2)$, la (11.27) può essere scritta nella forma:

$$g \frac{dh}{dx_1} = \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dx_2} \quad (11.30)$$

Essendo il termine a sinistra della (11.30) indipendente da x_2 , la (11.30) può essere integrata per ottenere:

$$\tau(x_2) = \gamma \frac{dh}{dx_1} x_2 + \text{costante} \quad (11.31)$$

Si ricordi che $dh/dx_1 = -i$, dove i è la pendenza motrice.

La costante che compare in (11.31) si determina osservando che il problema è simmetrico rispetto all'asse $x_2 = d/2$:

$$\tau(0) = \text{costante} = -\tau(d) = \gamma i d - \text{costante} \quad (11.32)$$

Quindi:

$$\tau = \gamma i \left(\frac{d}{2} - x_2 \right). \quad (11.33)$$

11.4.1 Il substrato laminare

Si consideri ora una zona del campo di moto così prossima alla parete da potere ivi ritenere $\tau(x_2)$ costante e pari a $\tau_0 = \gamma id/2$:

$$\tau(x_2) = \underbrace{\mu \frac{dV_1}{dx_2}}_{viscosa} - \underbrace{\rho \langle v'_1 v'_2 \rangle}_{turbolenta} \cong \tau_0 \quad (11.34)$$

In figura 11.6 è mostrato l'andamento delle componenti viscosa e turbolenta delle

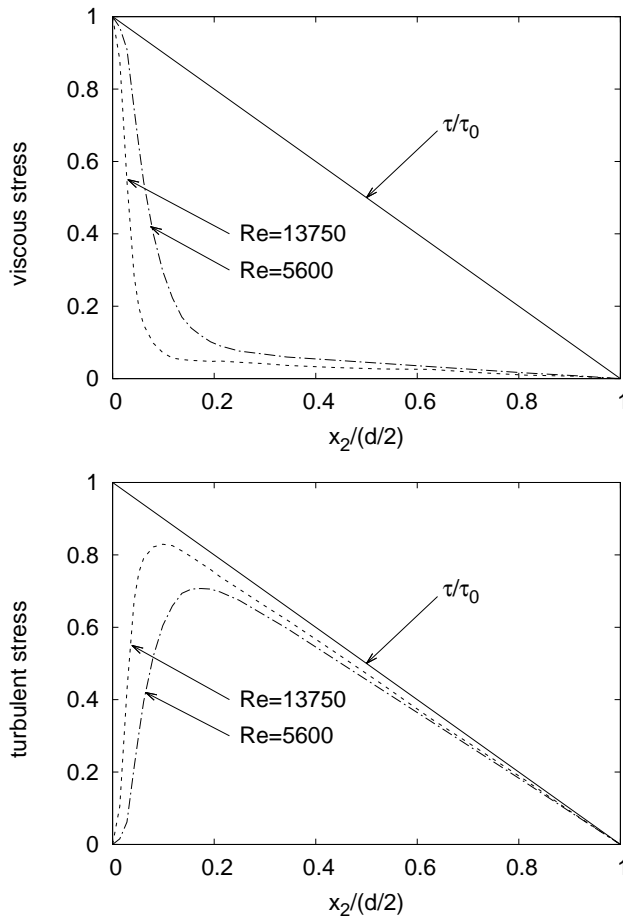


Figura 11.6: Tensione tangenziale viscosa, turbolenta e totale per $Re=5600$ e $Re=13750$.

tensioni tangenziali per due valori del numero di Reynolds insieme alle tensioni tangenziali totali. Si nota che le tensioni tangenziali sono massime in prossimità

della parete mentre sono trascurabili nella zona centrale del meato. Inoltre la figura mostra come la zona in cui le tensioni viscosse sono significative diminuisce al crescere del numero di Reynolds.

Poiché la condizione di aderenza sulla parete impone l'annullarsi sia della velocità media che delle componenti oscillanti, è ragionevole ritenere che a contatto della parete esista uno strato in cui le tensioni turbolente siano trascurabili e la tensione si riduca ad avere la sola componente viscosa. Tale strato si chiama 'substrato viscoso'. All'interno del substrato viscoso si può facilmente ottenere il profilo di velocità osservando che:

$$\tau_0 \cong \mu \frac{dV_1}{dx_2} \quad (11.35)$$

da cui, utilizzando anche le condizioni al contorno, si ottiene:

$$\frac{V_1(x_2)}{u_\tau} = \frac{u_\tau x_2}{\nu} \quad (11.36)$$

dove u_τ è la velocità di attrito definita dalla

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

All'interno del substrato viscoso la velocità varia linearmente con la distanza dalla parete e le tensioni tangenziali sono dovute al solo effetto della viscosità (si vedano le figure 11.6 e 11.7).

Sperimentalmente si osserva che la legge (11.36) è valida fino a una distanza dalla parete pari a circa $5\nu/u_\tau$, perciò lo spessore del substrato viscoso è ritenuto pari a $5\nu/u_\tau$.

11.4.2 Lo strato di equilibrio

Allontanandosi dalla parete ma mantenendosi ancora così vicino a essa da ritenere $\tau(x_2) \cong \tau_0$, le tensioni turbolente tendono a diventare predominanti. Si raggiungerà quindi una zona in cui

$$\tau_0 \cong -\rho \langle v'_1 v'_2 \rangle \quad (11.37)$$

Tale zona si chiama 'strato di equilibrio' ed è caratterizzata da valori di x_2 tali che $50\nu/u_\tau < x_2 < 0.1d$. Il limite superiore pari a $0.1d$ è introdotto perché lontano dalla parete non è più possibile ipotizzare $\tau(x_2) \cong \tau_0$.

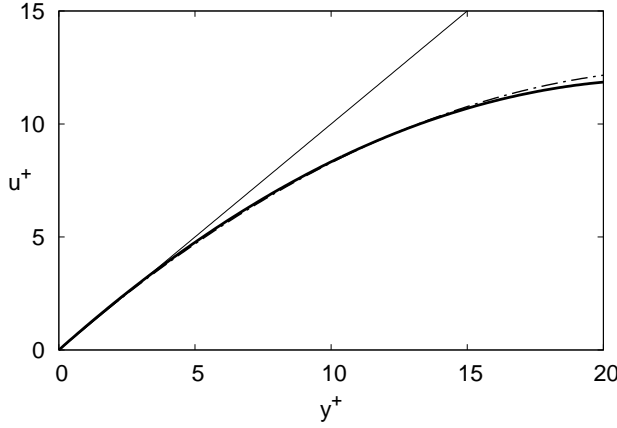


Figura 11.7: Profilo di velocità all'interno del substrato laminare. Linea continua = soluzione esatta ottenuta dall'integrazione dell'equazione di Navier-Stokes (DNS) e dalla successiva operazione di media, linea tratteggiata= equazione (11.36) ($u^+ = u/u_\tau$, $y^+ = u_\tau y/\nu$).

Per poter determinare il profilo di velocità entro lo strato di equilibrio è necessario utilizzare un modello di turbolenza per 'chiudere' il problema. Si utilizza quindi l'ipotesi di Boussinesq introdotta precedentemente (11.21):

$$\mathbf{T}^R = 2\mu_T \mathbf{D} - \frac{2}{3} K_t \mathbf{I} \quad (11.38)$$

che nel caso in esame porge:

$$\langle -\rho v'_1 u'_2 \rangle = \mu_T \frac{dV_1}{dx_2} \quad (11.39)$$

Si ipotizza che μ_T sia legata ai parametri del moto da una relazione algebrica (modello a zero equazioni):

$$\mu_T = \rho \kappa x_2 u_\tau \quad (11.40)$$

dove $\kappa \simeq 0.4$ è una costante ottenuta per via sperimentale nota come 'costante di von Karman'. Si noti che la (11.40) corrisponde alla (11.25) dove $\ell = x_2$, $u_0 = u_\tau$ e $C = \kappa$. Il modello a zero equazioni introdotto dalle (11.39) è detto **modello della lunghezza di mescolamento**. Dalle (11.37), (11.38) e (11.40) è quindi possibile calcolare il profilo di velocità medio:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_\tau^2 = \frac{\mu_T}{\rho} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \kappa x_2 u_\tau \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \quad (11.41)$$

da cui

$$\frac{V_1(x_2)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{x_2}{\hat{x}_2} + \frac{\hat{V}_1}{u_\tau} \quad (11.42)$$

dove \hat{V}_1 è il valore assunto da V_1 per $x_2 = \hat{x}_2$. Per poter determinare il valore di \hat{V}_1 è necessario specificare la natura della parete.

i) *Parete fluidodinamicamente liscia*

È il caso in cui le rugosità naturalmente presenti su una parete reale sono interamente contenute nel substrato laminare.

Detto y_r l'ordine di grandezza delle asperità della parete deve essere:

$$y_r < \frac{5\nu}{u_\tau}. \quad (11.43)$$

Se la parete è liscia, la costante che compare nella (11.42) si ricava imponendo la simultanea validità della (11.42) e della legge di velocità propria del substrato viscoso per $x_2 = 11.6\nu/u_\tau$.

La (11.42) diviene quindi

$$\frac{V_1(x_2)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{x_2 u_\tau}{11.6\nu} \right) + 11.6 \quad (11.44)$$

o equivalentemente

$$\frac{V_1(x_2)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{x_2 u_\tau}{\nu} \right) + 5.5 \quad (11.45)$$

In figura 11.8 è mostrato (linea continua) il profilo della velocità media all'interno del meato calcolato attraverso un procedimento numerico basato sull'integrazione delle equazioni di Navier-Stokes, detto "Direct Numerical Simulation" (DNS), che non introduce alcuna ipotesi. Nella stessa figura le linee tratteggiate mostrano i profili di velocità ottenuti applicando le relazioni (11.45) e (11.36) all'interno della regione logaritmica e del substrato laminare rispettivamente.

ii) *Parete scabra*

È il caso in cui le rugosità della parete hanno una dimensione molto maggiore del substrato laminare ($y_r > 5\nu/u_*$). In tale situazione non ha più senso ipotizzare la presenza del substrato viscoso e la costante che compare nella (11.42) si ottiene imponendo l'annullarsi della velocità a una distanza convenzionale dalla parete pari a $y_r/30$. Tale procedura conduce al seguente profilo di velocità:

$$\frac{V_1(x_2)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{x_2}{y_r/30}$$

che equivalentemente può essere scritto nella forma:

$$\frac{V_1(x)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{x_2}{y_r} + 8.5 \quad (11.46)$$

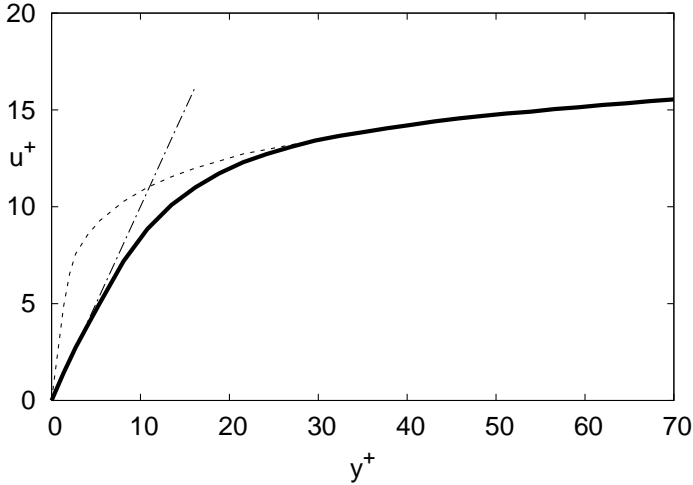


Figura 11.8

11.4.3 Il nucleo turbolento

A una distanza dalla parete maggiore di $0.1 d$, la tensione non può più essere ritenuta costante e pari a τ_0 . Inoltre è ragionevole ritenere che in questa zona le oscillazioni turbolente non siano significativamente influenzate dalla presenza della parete. Tale zona è detta 'nucleo turbolento'. Nel nucleo turbolento le tensioni possono essere quindi modellate utilizzando l'ipotesi di Boussinesq e considerando costante la viscosità turbolenta. Il valore costante μ_{T0} di μ_T è scelto pari al valore assunto in corrispondenza del bordo dello strato di equilibrio:

$$\mu_{T0} = \rho \kappa u_\tau 0.1d \quad (11.47)$$

Ricordando la (11.39) dalla (11.33) si ottiene:

$$\frac{\gamma i}{\mu_{T0}} \left(\frac{d}{2} - x_2 \right) = \frac{dV_1}{dx_2} \quad (11.48)$$

che, integrata imponendo la continuità di V_1 sul bordo dello strato di equilibrio, consente di ottenere il profilo di velocità che risulta essere di tipo parabolico.

Tuttavia poiché l'errore commesso, estendendo il profilo di velocità logaritmico al nucleo turbolento risulta modesto, nelle applicazioni pratiche spesso il profilo logaritmico di velocità è ritenuto significativo anche nel nucleo turbolento.

11.5 Valutazione del coefficiente di resistenza in un meato

Noto il profilo della velocità, è poi possibile ricavare i coefficienti di resistenza e/o di conduttanza che sono usualmente utilizzati nella pratica per valutare la portata defluente in un condotto o in un canale.

Considerato che nei paragrafi precedenti è stato determinato il profilo di velocità considerando un meato a sezione rettangolare infinitamente larga, consideriamo in dettaglio questo caso, anche se la procedura da seguire è simile nel caso di contotte a sezione circolare o per altre geometrie.

Il coefficiente di resistenza λ dipende dal numero di Reynolds Re nel caso di parete liscia o dalla scabrezza relativa $2y_r/d$ nel caso di parete scabra e può essere ricavato considerando la relazione che lo introduce

$$\frac{\tau_0}{\rho g R_i} = \frac{\lambda}{4 R_i} \frac{\overline{V_1}^2}{2g} \quad (11.49)$$

dove

$$\overline{V_1} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} V_1 d\Omega \quad \text{e} \quad R_i = \frac{\Omega}{B}$$

essendo R_i, Ω, B il raggio idraulico, la sezione e il perimetro bagnato del meato, rispettivamente. Essendo $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$, segue

$$\frac{\overline{V_1}^2}{u_\tau^2} = \frac{8}{\lambda} \quad \text{o anche} \quad \frac{\overline{V_1}}{u_\tau} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \quad (11.50)$$

Dunque

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{V_1}{u_\tau} d\Omega \quad (11.51)$$

Per un canale infinitamente largo, assumendo che la legge logaritmica descriva con sufficiente precisione il profilo di velocità su tutta la profondità, si ottiene, nel caso di parete scabra

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{8}{\lambda}} &= \frac{2}{d} \int_0^{d/2} \left[\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{x_2}{y_r} \right) + 8.5 \right] dx_2 = \\ &= \frac{2y_r}{d} \int_0^{\frac{d}{2y_r}} \left[\frac{1}{\kappa} \ln(\eta) + 8.5 \right] d\eta \end{aligned} \quad (11.52)$$

essendo η pari a x_2/y_r .

Sapendo che $\int \ln(\eta) d\eta = \eta [\ln(\eta) - 1]$, si ottiene

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{d}{2y_r} \right) - 1 \right] + 8.5 \quad (11.53)$$

e infine, notando che $\log X = \ln X \log e$ e introducendo il coefficiente di conduttanza $C = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$, si perviene a

$$\begin{aligned} C &= 5.75 \log \left(\frac{d}{2y_r} \right) + 6 = 5.75 \left[\log \left(\frac{d}{2y_r} \right) + 1.043... \right] = \\ &= 5.75 \left[\log \left(\frac{d}{2y_r} \right) + \log 11.0... \right] \end{aligned} \quad (11.54)$$

da cui

$$C = 5.75 \log \left(\frac{11d}{2y_r} \right) \quad (11.55)$$

Si noti che Marchi (1961), sulla base di risultati sperimentali, ha proposto

$$C = 5.75 \log \left(\frac{13.3d}{2y_r} f \right) \quad \text{con } f = 0.8 \quad (11.56)$$

Nel caso di parete liscia si ha invece

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = C &= \frac{2}{d} \int_0^{d/2} \left[\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_\tau x_2}{\nu} \right) + 5.5 \right] dx_2 = \\ &= \frac{2\nu}{u_\tau d} \int_0^{\frac{du_\tau}{2\nu}} \left[\frac{1}{\kappa} \ln \eta + 5.5 \right] d\eta \end{aligned} \quad (11.57)$$

essendo ora η pari a $u_\tau x_2 / \nu$.

Si ottiene dunque

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = C = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{du_\tau}{2\nu} \right) - \frac{1}{\kappa} + 5.5 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{du_\tau^4}{2\nu} \right) - \frac{1}{\kappa} \ln(4) - \frac{1}{\kappa} + 5.5 \quad (11.58)$$

Tenendo conto che

$$u_\tau = \frac{\sqrt{\lambda} \overline{V_1}}{\sqrt{8}} = \frac{\overline{V_1}}{C} \quad \text{e} \quad Re = \frac{4d\overline{V_1}}{2\nu} = \frac{4R_i\overline{V_1}}{\nu}$$

segue

$$C = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{4\overline{V_1}d}{2C\nu} \right) - 0.4657... = 5.75 \left[\log \left(\frac{4d\overline{V_1}}{2C\nu} \right) + \log(0.829...) \right] \quad (11.59)$$

da cui

$$C = 5.75 \log \left(\frac{4d\overline{V_1}0.829...}{2C\nu} \right) \quad (11.60)$$

Si noti che, in questo caso, Marchi (1961) ha proposto

$$C = 5.75 \log \left(\frac{Re}{C} f \right) \quad \text{con } f = 0.8 \quad (11.61)$$

11.6 Strato limite turbolento su lastra piana

Nel capitolo 10, lo studio dello strato limite su lastra piana è stato affrontato utilizzando un metodo integrale e assumendo noto l'andamento del profilo della velocità all'interno dello strato sotto l'ipotesi di moto laminare. Quando il numero di Reynolds R_x supera un valore critico, pari a circa 5×10^5 , i disturbi presenti all'interno del campo di moto cominciano a crescere e si realizza la transizione verso il regime di moto turbolento. Adottando l'approccio integrale già descritto per lo strato limite laminare, è possibile determinare come cresce lo spessore dello strato limite e la resistenza semplicemente utilizzando un ragionevole profilo di velocità che approssima con sufficiente precisione quello reale. Per valori del numero di Reynolds tali che il moto all'interno dello strato è turbolento, una legge che approssima l'andamento della velocità media all'interno dello strato e che approssima abbastanza bene la legge logaritmica di velocità caratteristica delle correnti turbolente, risulta:

$$\frac{\langle u \rangle}{u_\tau} = 8.74 \left(\frac{u_\tau y}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}} \quad \text{con} \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (11.62)$$

dove τ_0 è la tensione tangenziale sulla piastra e u_τ è la velocità di attrito.

Detto U il valore della velocità esterna sul bordo dello strato e utilizzando la (11.62), è possibile ottenere:

$$\frac{\langle u \rangle}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (11.63)$$

È quindi possibile calcolare l'integrale che appare nella (10.18):

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{\langle u \rangle}{U} \left(1 - \frac{\langle u \rangle}{U} \right) dy = \frac{7}{72} \delta \quad (11.64)$$

ottenendo

$$\tau_0 = \frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}. \quad (11.65)$$

Dalla (11.62) espressa per $y = \delta$, si può calcolare la velocità di attrito:

$$u_\tau = \left(\frac{U}{8.74} \right)^{\frac{7}{8}} \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{\frac{1}{8}}$$

e quindi la tensione alla parete:

$$\tau_0 = 0.0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{\delta U} \right)^{\frac{1}{4}}$$

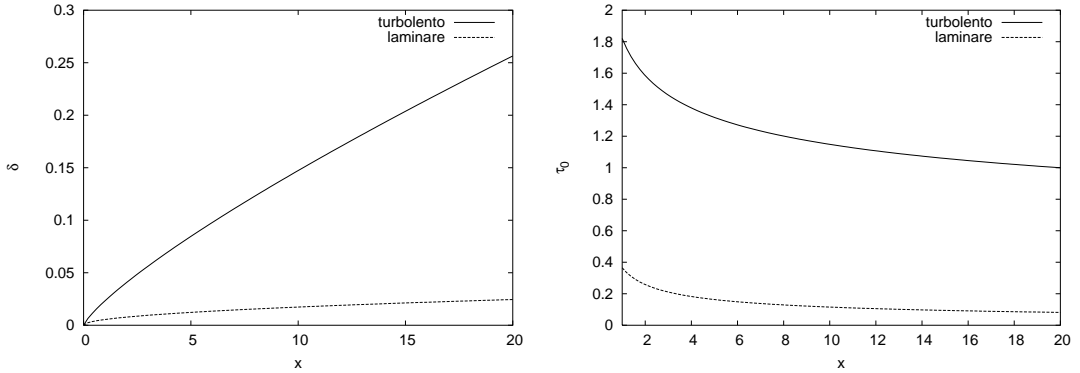


Figura 11.9: Spessore dello strato limite nei casi laminare e turbolento in funzione di x (immagine a sinistra); tensione tangenziale sulla parete in funzione di x ($U = 1$ m/s, fluido=acqua) (immagine a destra).

che sostituita nella (11.65) consente di ottenere:

$$\delta^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{dx} = 0.231 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Quest'ultima, integrata, porge l'andamento dello spessore dello strato limite δ in funzione di x :

$$\delta(x) = 0.37 x^{\frac{4}{5}} \left(\frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (11.66)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\delta}{x} = 0.37 \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{0.37}{Re_x^{\frac{1}{5}}}$$

mentre il calcolo della tensione tangenziale sulla parete fornisce:

$$\tau_0 = 0.0577 \rho \frac{U^2}{2 Re_x^{\frac{1}{5}}} \quad (11.67)$$

In figura 11.9 è mostrato l'andamento dello spessore dello strato limite al variare di x , ottenuto utilizzando la relazione (10.22), valida nel regime di moto laminare, e la (11.66), valida nel regime turbolento. È possibile osservare come lo strato limite turbolento presenti spessori maggiori del corrispondente strato in regime laminare.

Il confronto tra le relazioni (10.23) e (11.67), mostrato in figura 11.9, mette in evidenza come le tensioni tangenziali sulla parete generate dal moto turbolento risultino maggiori di quelle che è in grado di sviluppare un moto laminare.

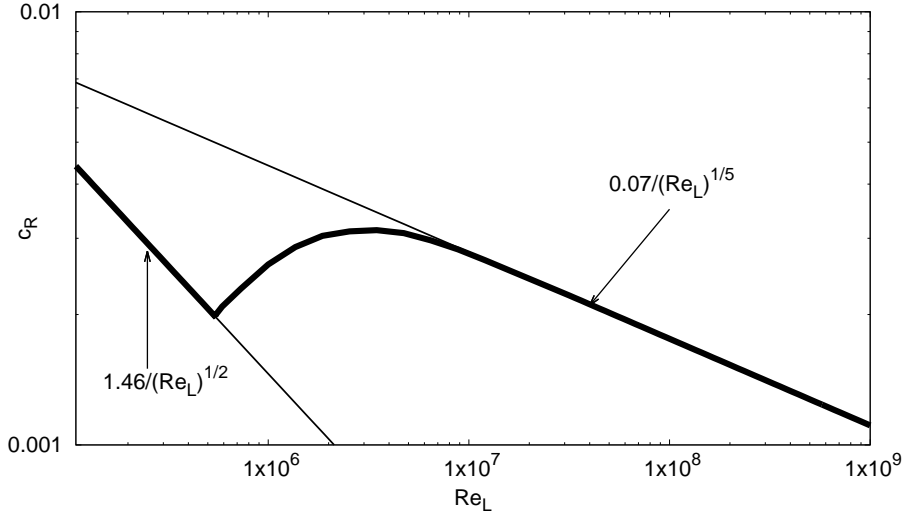


Figura 11.10

Analogamente al caso laminare è quindi possibile calcolare la resistenza R incontrata da ciascuna faccia della piastra (per unità di larghezza) lunga L :

$$R = \int_0^L \tau_0 dx = 0.072 \rho \frac{U^2}{2} \left(\frac{\nu}{UL} \right)^{\frac{1}{5}} L$$

e il coefficiente di resistenza c_R :

$$c_R = \frac{2R}{\rho U^2 L} = \frac{0.072}{(Re)^{\frac{1}{5}}} \quad (11.68)$$

In figura 11.10 è mostrato il coefficiente di resistenza in funzione del numero di Reynolds, insieme alla curva ricavata in precedenza per il regime laminare.

11.7 Energia cinetica della turbolenza

Al fine di sviluppare modelli di turbolenza più accurati di quello esposto in precedenza, è utile considerare l'equazione dell'energia cinetica per unità di volume, associata alle oscillazioni turbolente (K_t), definita dalla (11.22). L'equazione di evoluzione di K_t si ottiene a partire dalle equazioni di Navier-Stokes con il procedimento di seguito sinteticamente illustrato.

(i) Moltiplicazione dell'equazione di Navier Stokes nella direzione x_i per v'_i

$$v'_i \rho \left[\frac{\partial(V_i + v'_i)}{\partial t} + (V_j + v'_j) \frac{\partial(V_i + v'_i)}{\partial x_j} \right] = \rho v'_i f_i - v'_i \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p') + \mu v'_i \frac{\partial^2 (V_i + v'_i)}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \quad (11.69)$$

(ii) Operazione di media

$$\begin{aligned} & \rho \langle v'_i \frac{\partial V_i}{\partial t} \rangle + \rho \langle v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial t} \rangle + \\ & + \rho \langle v'_i V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + v'_i V_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_i v'_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + v'_i v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \rangle = \\ & = \rho \langle v'_i f_i \rangle - \langle v'_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \rangle - \langle v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} \rangle + \mu \langle v'_i \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \rangle + \mu \langle v'_i \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \rangle \end{aligned} \quad (11.70)$$

da cui si ottiene con semplici passaggi

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{1}{2} v'_i v'_i \rangle + \rho V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \frac{1}{2} v'_i v'_i \rangle = \\ & - \rho \langle v'_i v'_\ell \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_\ell} - \rho \langle v'_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\frac{1}{2} v'_i v'_i \right) \rangle - \langle v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} \rangle + \mu \langle v'_i \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \rangle \end{aligned} \quad (11.71)$$

(iii) Somma rispetto all'indice i tenendo conto dell'equazione di continuità $\partial v'_\ell / \partial x_\ell = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial K_t}{\partial t} + V_j \frac{\partial K_t}{\partial x_j} = \frac{dK_t}{dt} = \\ & = \langle -\rho v'_i v'_\ell \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_\ell} - \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\langle v'_\ell \frac{\rho}{2} v'_i v'_i \rangle + \langle v'_\ell p' \rangle - \mu \frac{\partial}{\partial x_\ell} \langle \frac{1}{2} v'_i v'_i \rangle \right] + \\ & - \mu \langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\ell} \rangle \end{aligned} \quad (11.72)$$

Ricordando il teorema dell'energia meccanica, è possibile scrivere le dissipazioni medie di energia cinetica per unità di volume (ε_D) come:

$$\varepsilon_D = 2\mu \langle D_{ij} D_{ij} \rangle = 2\mu \langle D_{lm} D_{lm} \rangle + 2\mu \langle D'_{lm} D'_{lm} \rangle = \varepsilon_{DM} + \varepsilon_{DT}$$

dove $\langle D_{lm} \rangle$ è la componente lm del tensore delle velocità di deformazione riferito al moto medio mentre D'_{lm} è la componente corrispondente del tensore delle velocità di deformazione riferito al moto di fluttuazione.

Si può facilmente mostrare che:

$$\varepsilon_{DT} = \mu \left(\left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\ell} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial v'_\ell}{\partial x_i} \right\rangle \right) = \mu \left[\left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\ell} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\left\langle v'_i \frac{\partial v_\ell}{\partial x_i} \right\rangle \right) \right]$$

e quindi la (11.72) può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \frac{dK_t}{dt} = & \underbrace{\left\langle -\rho v'_i v'_\ell \right\rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_\ell}}_{\text{Produzione}} - \\ & \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\left\langle v'_\ell \frac{\rho}{2} v'_i v'_i \right\rangle + \left\langle v'_\ell p' \right\rangle - \nu \frac{\partial K_t}{\partial x_\ell} - \mu \left\langle v'_i \frac{\partial v'_\ell}{\partial x_i} \right\rangle \right]}_{\text{Ridistribuzione}} - \underbrace{\varepsilon_{DT}}_{\text{Dissipazione}} \end{aligned} \quad (11.73)$$

Il primo termine a sinistra del segno uguale nella (11.73) viene detto di produzione perché, come vedremo, appare con il segno cambiato nell'equazione dell'energia cinetica del moto medio. Esso descrive il trasferimento di energia dal moto medio alla turbolenza, che avviene per opera dei macrovortici che hanno scale spaziali paragonabili a quelle del moto medio. Il secondo termine descrive la ridistribuzione dell'energia all'interno di un volume finito per effetti legati al moto di fluttuazione, alla pressione e alla diffusione viscosa. Infatti integrando questo termine su un volume V e applicando il teorema della divergenza è facile vedere che si ottiene il flusso, attraverso la superficie di V , della quantità racchiusa tra parentesi quadre. L'ultimo termine rappresenta le dissipazioni di energia per unità di volume.

In figura 11.11 è mostrato l'andamento dei termini della (11.73) in funzione della distanza dalla parete ($y^+ = y u_\tau / \nu$) in un canale piano. Si osservi che i termini di ridistribuzione sono significativi solo in vicinanza della parete mentre i termini di produzione e dissipazione assumono valori considerevoli anche per valori di y^+ grandi e raggiungono lo stesso ordine di grandezza nello strato di equilibrio introdotto nel paragrafo precedente.

L'equazione per K_m , energia cinetica del moto medio (per unità di volume), definita come

$$K_m = \frac{1}{2} \rho \langle (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2) \rangle \quad (11.74)$$

si ottiene a partire dall'equazione di Reynolds espressa come:

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \tilde{T}_{\ell i}}{\partial x_\ell} \quad (11.75)$$

ove

$$\tilde{T}_{\ell i} = -p \delta_{\ell i} + 2\mu D_{\ell i} - \langle \rho v'_i v'_\ell \rangle = T_{\ell i} + T_{\ell i}^R \quad (11.76)$$

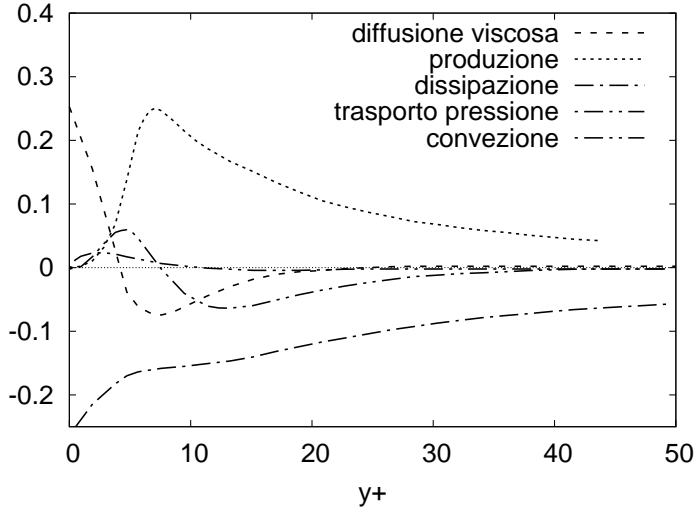


Figura 11.11

racconta il tensore delle tensioni totali cioè fornite dalla somma delle tensioni sia viscosi che turbolenti. La procedura per ottenere l'equazione di evoluzione di K_m è descritta nel seguito.

(i) Moltiplicazione dell'equazione di Cauchy lungo x_i per V_i :

$$\rho V_i \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_i V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho f_i V_i + V_i \frac{\partial \tilde{T}_{\ell i}}{\partial x_\ell} \quad (11.77)$$

(ii) Somma rispetto all'indice i

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V_i V_i \right) + V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho V_i V_i \right) &= \frac{dK_m}{dt} \\ &= \rho f_\ell V_\ell + \frac{\partial}{\partial x_\ell} (V_k \tilde{T}_{\ell k}) - \tilde{T}_{\ell k} \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} \\ &= \rho f_\ell V_\ell + \frac{\partial}{\partial x_\ell} (V_k \tilde{T}_{\ell k}) - T_{\ell k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial V_\ell}{\partial x_k} \right) - T_{\ell k}^R \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} \\ &= \rho f_\ell V_\ell + \frac{\partial}{\partial x_\ell} (V_k \tilde{T}_{\ell k}) - T_{\ell k} D_{\ell k} - \langle -\rho v'_\ell v'_k \rangle \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} \end{aligned} \quad (11.78)$$

La (11.78) mostra che la derivata materiale dell'energia cinetica del moto medio (per unità di volume) uguaglia la somma dei seguenti termini: potenza (per unità di volume) associata alle forze di massa ($\rho f_\ell V_\ell$), potenza associata alle forze di superficie ($\partial(V_k \tilde{T}_{\ell k})/\partial x_\ell$), potenza dissipata per effetto della viscosità

$(-T_{\ell k} D_{\ell k})$ e potenza trasferita dal moto medio a quello di fluttuazione turbolenta $(\langle -\rho v_\ell v_k \rangle \partial V_k / \partial x_\ell)$.

11.8 I modelli di turbolenza

Il calcolo dei campi di moto turbolenti, a causa del problema della chiusura illustrato in precedenza, richiede modelli opportuni detti ‘modelli di turbolenza’.

I modelli di turbolenza oggi più diffusi sono i modelli RANS (Reynolds-averaged Navier Stokes) che prevedono la soluzione, per via numerica, delle equazioni di Reynolds, dove le tensioni turbolente di Reynolds sono modellate sulla base dell’ipotesi di Boussinesq. La viscosità turbolenta μ_T , che compare nell’ipotesi di Boussinesq, è espressa in termini di grandezze caratteristiche della turbolenza.

Uno dei modelli più utilizzati, il modello $k-\varepsilon$, utilizza equazioni differenziali per calcolare la k (energia cinetica della turbolenza) e la ε (velocità di dissipazione dell’energia cinetica della turbolenza) e appartiene quindi alla classe dei modelli a due equazioni.

Le quantità k ed ε sono definite come:

$$k = \frac{1}{2} \rho \langle v'_i v'_j \rangle \quad \varepsilon = \mu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\ell} \right\rangle.$$

Con ρ , k ed ε è possibile formare una lunghezza scala ($\ell = \rho^{-1/2} k^{3/2} / \varepsilon$) e una velocità scala ($u_0 = \rho^{-1/2} k^{1/2}$). Utilizzando la (11.25) è possibile esprimere μ_T come:

$$\mu_T = C_\mu k^2 / \varepsilon \quad (11.79)$$

dove $C_\mu = 0.09$ è una delle cinque costanti che caratterizzano il modello e il suo valore è fissato empiricamente.

L’equazione per la k è derivata dall’equazione per l’energia cinetica turbolenta (11.72), che sinteticamente può essere scritta come:

$$\frac{dk}{dt} = -\nabla \cdot T + \mathcal{P} - \varepsilon \quad (11.80)$$

dove

$$T_i = \frac{1}{2} \rho \langle v'_i v'_j v'_j \rangle + \langle v'_i p' \rangle - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \langle v'_i v'_i \rangle \right)$$

e il termine $\nabla \cdot T$ nella (11.80), che rappresenta il flusso di energia cinetica della turbolenza, è modellato come:

$$T = -\frac{\nu_T}{\sigma_k} \nabla k \quad (11.81)$$

con $\sigma_k = 1.0$ e $\nu_T = \mu_T / \rho$.

Il termine $\mathcal{P} = -\rho \langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ è espresso attraverso l'ipotesi di Boussinesq e diviene:

$$\mathcal{P} = \left[\mu_T \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \frac{\partial V_i}{\partial x_j}. \quad (11.82)$$

L'equazione del modello per k risulta quindi:

$$\frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left[\frac{\nu_T}{\sigma_k} \nabla k \right] + \underbrace{\left[\mu_T \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \frac{dV_i}{dx_j}}_{\mathcal{P}} - \epsilon \quad (11.83)$$

L'equazione per ε , velocità di dissipazione dell'energia cinetica della turbolenza, è derivata sulla base di considerazioni empiriche:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\mathcal{P} \varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (11.84)$$

dove

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (11.85)$$

I valori delle costanti del modello riportati sopra sono dovuti a Launder & Sharma (1974). Modelli $k - \varepsilon$ con valori delle costanti differenti sono stati proposti recentemente in letteratura.

Bibliografia

Batchelor G.K. (1967). *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, 614 pages.

Blasius P.R.H. (1908). *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*. *Zeit. für Mathematik und Physik*, **56**, 1-37.

Boussinesq, J. (1877). *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, **23** (1), 1-680.

Falkner V.M. & Skan S.W. (1930). *Some approximate solutions of the boundary layer equations*, British Aero. Res. Coun. Rep. and Mem. n. 1314.

Föttinger H. (1939). *Mitteilungen der Vereinigung der Gross-Kesselbesitzer*, **73**, 151 pages.

Kàrmàn Th. von (1921). *Bemerkung zu der Frage der Strömungsform um Widerstandskörper bei großen Reynoldsschen Kennzahlen* [Remark on the issue of flow resistance to form body at large Reynolds numbers], In: Kàrmàn Th. von, Levi-Civita T. (eds) *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik* (Innsbruck 1922). Springer, Berlin, Heidelberg.

Kutta M.W. (1910). *Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung*, Sitzungsberichte der königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, **40**, 1-58.

Hagen G. (1839). *Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren*, *Annalen der Physik und Chemie*, **122** (3), 423-442.

Launder B. & Sharma B.I. (1974). *Application of the energy-dissipation model of flow near a spinning disc*, *Lett. Heat Mass Transfer*, 131-138.

Marchi E. (1961). *Il moto uniforme nelle correnti liquide nei condotti chiusi e aperti*, *L'Energia Elettrica* **38** (4), 289-300.

Oseen C.W. (1910). *Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der hydrodynamik*, Ark. Mat. Astron. Fys. **6**, 1.

Pohlhausen, K. (1921). *Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der Grenzschicht*, ZAMM, **1**, 252-268.

Poiseuille J. L. M. (1840)a. *Recherches experimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres petits diametres; I. Influence de la pression sur la quantite de liquide qui traverse les tubes de tres petits diametres*, C. R. Acad. Sci. **11**, 961-967.

Poiseuille J.L.M. (1840)b. *Recherches experimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres petits diametres; II. Influence de la longueur sur la quantite de liquide qui traverse les tubes de tres petits diametres; III. Influence du diametre sur la quantite de liquide qui traverse les tubes de tres petits diametres*, C. R. Acad. Sci. **11**, 1041-1048.

Prandtl L. (1905). *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verhandlungen des dritten internationalen, Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, 8-13 August 1904, 489-491, Teubner, Leipzig.

Prandtl L. (1927). *Die Entstehung von Wirbeln in einer Flüssigkeit mit kleiner Reibung* [The Generation of Vortices in Fluids of Small Viscosity], (Wilbur Wright Memorial Lecture read before the Royal Aeronautical Society, 16 May 1927), Z. Flugtechnik. **18**, 489-496 and J. Roy. Aeronaut. Soc. **31**, 720.

Reynolds O. (1896). (see Reynolds O. 1901) *Papers on Mechanical and Physical Subjects*, 1881-1900, Collected Works, **2**, 535-77, Cambridge Univ. Press. See also Launder BE, ed. 1995. Osborne Reynolds Centenary Volume. Proc. R. Soc. Ser. A 451:5-47.

Sleath J.F.A. (1984). *Sea Bed Mechanics*, John Wiley & Sons.

Stokes G.G. (1851). (read on December 9, 1850). *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, Trans. Cambridge Phil. Soc. IX, 8-106, Mathematical and Physical Papers 3, 1-141.

Truesdell C. & Noll W. (1965). *The non-linear field theories of mechanics*, in Encyclopedia of Physics, ed. S. Flugge, **3/3**, Springer-Verlag.

Paolo Blondeaux si è laureato in Ingegneria Civile, sezione Idraulica, presso l'Università di Genova dove ha iniziato la sua carriera accademica prima come ricercatore confermato e poi come professore associato. Divenuto professore ordinario presso l'Università dell'Aquila nel 1994, è ritornato all'Università di Genova nel 1997 dove tuttora insegna Meccanica dei Fluidi e Coastal Hydrodynamics and Morphodynamics.

I suoi interessi scientifici spaziano dalla dinamica della vorticità alla modellazione della turbolenza, dallo studio delle onde di mare alla morfodinamica costiera.

Giovanna Vittori si è laureata in Matematica presso l'Università di Genova nel 1986 e nel 1991 ha ottenuto il titolo di dottore di ricerca in Idrodinamica dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica. Attualmente è professore ordinario presso l'Università di Genova dove insegna Idrodinamica nei corsi di studio in Ingegneria Navale.

I suoi principali interessi scientifici comprendono temi di base della Meccanica dei Fluidi (stabilità idrodinamica, simulazioni dirette delle equazioni di Navier-Stokes, dinamica della turbolenza, ...) e l'idrodinamica e la morfodinamica costiera.

Queste note sono state scritte per fornire un testo di riferimento per approfondire gli argomenti trattati durante i corsi di Idrodinamica e Meccanica dei Fluidi offerti agli studenti delle lauree magistrali in Ingegneria Navale, Civile e Ambientale attive presso la Scuola Politecnica. Tuttavia anche gli studenti di altri corsi di laurea magistrale possono trovarle utili per la loro formazione. Partendo dai principi fondamentali della fisica, nelle note vengono ricavate le equazioni puntuali che descrivono la dinamica dei fluidi. Successivamente vengono descritte alcune soluzioni esatte del problema del moto di un fluido e gli approcci che sono utilizzati per determinare in forma approssimata il campo di moto, quando la complessità del problema ne impedisce la soluzione in forma chiusa. In particolare vengono esaminati i moti caratterizzati da bassi e alti valori del numero di Reynolds. In quest'ultimo caso vengono descritti il modello di fluido ideale e quello di moto irrotazionale insieme alla teoria dello strato limite. L'ultima parte delle note è dedicata ai moti turbolenti, anche se la vastità di questo argomento ne impedisce una trattazione approfondita.

These notes were written to provide a reference text for the students of the master degrees in Naval, Civil and Environmental Engineering of the Polytechnic School of the University of Genoa, who are interested in learning more about the topics covered in the courses of Hydrodynamics and Fluid Mechanics. However, also students of other master degrees might find them useful for their formation. In the notes, starting from the basic principles of physics, the equations describing fluid dynamics are derived. Some exact solutions of the problem of fluid motion are determined and the approaches to be used to derive approximate solutions when the complexity of the problem prevents finding its solution in closed-form, are described. In particular, the flows at both low and high Reynolds numbers are considered. In the latter case, the inviscid fluid and the irrotational flow models are described along with the the boundary layer which develops close to a rigid wall. The last part of the notes is devoted to turbulent flows, even though this topic is too broad to be discussed in depth in these brief notes.

ISBN: 978-88-94943-93-1



Immagine di copertina

Coppia di vortici generati dall'efflusso di un volume finito di fluido da una canale semi-infinito
(da Blondeaux & De Bernardinis (1983) "On the formation of vortex pairs near orifices"
J. Fluid Mech. vol. 135, pagine 111-122)